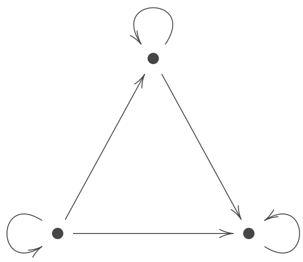
Росен Люцканов

ЛИЦАТА НА ПРОТЕЙ

увод в концептуалната математика



Изток-Запад
София, 2013

ISBN 978-619-152-256-9

MSC 2010: 00A30, 03G30, 18A15.

Росен Люцканов

Лицата на Протей

Българска, първо издание

Рецензенти	**доц. Доротея Ангелова**
	доц. Николай Обрешков
Оформление на корицата	**Деница Трифонова**
формат	**8/60/90**
обем	**38 п.к.**
дадена за печат	**юли 2013**
излязла от печат	**юли 2013**
Предпечат и печат	**Изток-Запад**

ИЗТОК ЗАПАД

1124 София, жк „Яворов“, бл. 1, ап. 3
тел.: (02) 946 35 21
e-mail: iztok.zapadbg@gmail.com
iztok_zapad@abv.bg

www.iztok-zapad.eu

Предговор

Предговорът е мястото, в което една книга трябва да заяви своите основания за съществуване. Иначе казано, на него се полага да даде отговор на два вътрешно свързани въпроса: „Как стана така, че бях написана?“ и „Защо трябва да бъда прочетена?“. Първият от тях препраща към една история, която започва в (не)далечната 2007 година, когато завършвах докторската си дисертация[1]. В нея ставаше дума за един от най-обсъжданите резултати в съвременната математическа логика - теоремата за непълнота, която демонстрира, че при обширен клас от формални системи се наблюдава разминаване между синтактичното понятие за доказуемост и семантичното понятие за истинност (вж. последния параграф в четвърта глава на настоящата книга). Една от целите ми беше да покажа, че очертаването на границата между доказуемост и истинност, както и опитите за нейното преодоляване, до голяма степен са определящи за развитието на логиката през следващите десетилетия. Очевидно, когато е налице граница, тя може да бъде прекрачена във всяка от двете посоки; съответно, съвпадение между истинност и доказуемост можем да постигнем като модифицираме понятието за доказателство, или като преминем към нов тип семантика. Първата от тези две стратегии се радва на много по-голяма популярност, но все пак са известни и опити от втория тип. Един от тях е представен в забележителна статия (Awodey and Reck 2002), чиито автори показват, че ограниченията, наложени от теоремата за непълнота, все пак са преодолими. За целта обаче е нужно да интерпретираме математическите твърдения като отнасящи се не до множества, а до така наречените „снопове“ (sheaves).

За мое нещастие, скоро стана очевидно, че е практически невъзможно да вникна в съдържанието на споменатата статия. Тя използваше непознат за мен език, развит в рамките на относително нова математическа дисциплина, наречена „теория на категориите“. Опитите ми да усвоя този език претърпяха пълен провал и причината беше не просто езикът, а свързаният с него начин на мислене. През изминалите години се опитах да усвоя този нов концептуален инструмент, да се науча да виждам света на математиката по нов начин. Настоящият текст документира резултатите от тези мои опити. Причината, поради която се надявам, че той може да представлява някакъв интерес, е свързана с убеждението ми, че трудностите, на които се натъкнах, или дори грешките, които със сигурност съм допуснал, са типични за всеки чужденец, който за пръв път навлиза в тази част от света на съвременната математика. Тя се ражда преди около двадесет и пет века като наука, в чиято основа са положени интуитивно достоверни и подлежащи на сетивно онагледяване твърдения, изразяващи в абстрактна форма множество от емпирично проверими закономерности, но понастоящем е трудно обозрима съвкупност от различни теории, повечето от които съзнателно избягват позоваването на интуицията и боравят с твърдения, които не са нито сетивно онагледими, нито емпирично проверими. Промяната очевидно е толкова дълбока, че ако все пак остава незабелязана, това е единствено благодарение на обстоятелството, че се е случила изключително бавно - Евклид не е съвременник на Хилберт, но между тях е налице непрекъсната верига от посредници, която свързва „Елементите“ на първия с „Основите“ на втория. Предстои да се убедим, че теорията на категориите е показателен пример за всичко онова, което отличава „старата“ от „новата“ математика.

Преди всичко, теорията на категориите е *обща* теория, синтезираща резултатите на частните математически дисциплини - топология и алгебра, логика и геометрия. Всички нейни твърдения са формулирани с точност до изоморфизъм, което означава, че те са изпълнени за произволна система от обекти, които реализират съответната структура. При това, няма никакво значение, дали тези обекти са естествени числа, векторни пространства или логически пропозиции - всяка дефиниция, конструкция или теорема, доказана в рамките на теорията на категориите, може безпроблемно да бъде „пренесена“ в съответната частна математическа теория. По-нататък, теорията на категориите е *абстрактна* теория, която не взема предвид специфичния характер на изследваните обекти. Нейният предмет е фиксиран чрез аксиоматична дефиниция, изразена на формален език, допускащ различни интерпретации и приложим при изследването на множество конкретни системи. Това по принцип изключва възможността да намерим някакво интуитивно съдържание, скрито зад видимостта на формулите. Дори би могло да се каже, че е погрешно да питаме за какво „в действителност“ става дума в теорията на категориите. Накрая, по силата на вече казаното може да се твърди, че теорията на категориите е *безсмислена*.

[1] Публикувана от издателство „Изток-Запад“ под заглавието *Теоремата за непълнота: контексти на интерпретация* (2008).

Ако критерий за смисленост е способността ни да открием определен дял от реалността, към който се отнася съответното твърдение, то теорията на категориите наистина е лишена от смисъл. Както вече стана дума, тя осигурява такава математическа форма, която сама по себе си е „празна“ (несвързана с конкретно интуитивно, частно математическо или емпирично локализирано съдържание), но тъкмо благодарение на това може да приеме в себе си произволно съдържание. Ето защо, самите създатели на теорията на категориите, Самуел Айленберг и Сондърс Мак Лейн, обобщават тези нейни специфични черти, като шеговито я именуват „обща теория на абстрактните безсмислици“. Наистина, както по-късно си спомня Мак Лейн, „по това време понякога определяхме нашата тема като обща абстрактна безсмислица (*general abstract nonsense*), макар да не вземахме насериозно определението безсмислица и да се гордеехме с нейната общност“ (Mac Lane 2005, 125-126). Много години по-късно, Мак Лейн открива една прекрасна метафора, изказваща лаконично всичко казано до този момент: „Математиката има протейски характер, тъй като една и съща математическа структура има множество различни емпирични реализации“ (Mac Lane 1992, 3). Както подсказва името му, морският старец Протей е един от най-старите богове в гръцката митология. Неговите отличителни черти са две: той никога не лъже и е способен да приеме формата на всяко живо същество или неодушевен предмет. По същия начин, математиката е най-древната човешка наука. Освен това, тя винаги казва истината, тъй като доказаните по математически път твърдения са образец за необходимо и сигурно знание. Накрая, математическите структури могат да бъдат облечени в осезаема плът по много различни начини, разкривайки неочаквани закономерности и връзки между материалния свят на конкретните обекти и безплътните светове на абстрактните обекти. Ето защо, аналогията между математиката и Морския старец е всичко друго, но не и произволна.

Така стигаме до втората част от заглавието, съдържаща непривичното определение „концептуална математика“. Ако математиката не беше променила напълно своя облик през изминалите столетия, то подобна фраза вероятно щеше да бъде безсмислена. Наистина, по силата на традиционното разделение на труда, математиката доскоро се занимаваше не с понятия, а с числа и геометрични фигури. От друга страна, работата с понятия беше запазена територия на метафизичното мислене. Още преди появата на теорията на категориите обаче, това разделение вече не е приложимо на практика, тъй като една от отликите на модерната математика е това, че „методите, техниките и инструментите, разработени в нейните рамки, сами се превръщат в обекти на знание“[2]. Благодарение на това още през втората половина на XIX век е демонстрирано на практика, че самите математически структури могат да се разглеждат като обект, в чието изследване са приложими математически методи. Ето защо, както пояснява известният финландски логик Яко Хинтика, „концептуалната математика характеризира и изследва различни видове структури, както и понятията, които са нужни, за да говорим за тях“[3]. Иначе казано, сред задачите на днешната математика е сама да изработва и легитимира своите собствени концептуални инструменти. Тъкмо по тази причина, Уилям Лавер нарича своето популярно въведение в теорията на категориите „Концептуална математика“ (Lawvere and Shanuel 1997) - тук е изложена вътрешно съгласувана система от понятия, в която са изразими идеите, положени в основата на елементарната математика. Самата теория на категориите може да се разглежда като аналогичен опит същото да бъде направено по отношение на *цялата* математика.

Надявам се, че казаното до този момент дава достатъчно изчерпателен отговор на въпроса „как?“. Така стигаме до въпроса „защо?“, чийто отговор може да бъде разделен на две части. Първо, налице са достатъчно основания да смятаме, че теорията на категориите сама по себе си е полезен инструмент, който може да бъде използван от логици, физици, програмисти и философи (без да допускам, че този списък е изчерпателен). Основанията за това са посочени в четвърти параграф на първа глава. Там е показано накратко какви са нейните приложения в съответните научни области, простиращи се от абстрактната теория на моделите, формализма на квантовата механика и семантиката на програмните езици до въпроса за онтологията на математическите теории и динамиката на политическите процеси. Второ, теорията на категориите се ражда в контекста на една специфична математическа теория - хомологичната алгебра - и все още носи родилни белези, които нагледно доказват това. Повечето от известните ми въвеждащи изложения я представят като концептуален инструмент на работещия

[2] Вж. Marquis, J.-P. 2006. A path to the epistemology of mathematics: homotopy theory. In: Ferreiros, J. and J. Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*, p. 241. Oxford: Oxford University Press.

[3] Вж. Hintikka, J. 2011. What is the axiomatic method? *Synthese 183*, 69-85.

математик, привеждайки множество примери от топологията, алгебрата и геометрията. Обикновено основните понятия и конструкции се поясняват пределно лаконично, при това именно чрез такива примери. Тук се опитах да избегна тази хронична прибързаност, предлагайки на вниманието на читателя изложение, което в минимална степен предполага наличието на предварителни познания в една или друга математическа дисциплина. Друга особеност на наличните въведения, която е пряко свързана с предишната, се отнася до начина, по който са представени доказателствата на основните теореми. Много от тях често биват излагани схематично, или дори пропускани изцяло, като безпомощният читател е оставен сам да се „упражни“ с тях. Постарал съм се тук да не срещнете *нито едно* твърдение, начините за чието обосноваване да не са достатъчно изчерпателно описани[4]. Този аспект има и концептуално значение: смисълът на дадено понятие или конструкция се разкрива в неговата връзка с останалите понятия и конструкции в съответната математическа теория, а доказателствата са нашата ръководна нишка в набелязването на връзки от този тип. Трета отлика на настоящия текст е свързана с използването на така наречените „комутативни диаграми“. Те са специфично за теорията на категориите средство за онагледяване на изпълнеността на определени съотношения, предоставените от което възможности рядко биват използвани в пълния им обем. Дори техният откривател Мак Лейн ги прилага относително рядко в известната си монография (Mac Lane 1971) за сметка на съответните алгебрични изрази. Без съмнение, причините за това са отчасти технически, тъй като относително доскоро средствата за тяхното възпроизвеждане бяха силно ограничени. Стремял съм се да се възползвам максимално от напредъка в тази област, поради което тук ще срещнете повече графични изображения, отколкото в който и да било друг текст, посветен на същата тема. Това ни дава рядката възможност да „видим“ истинността на твърдението, което доказваме, да получим интуитивен достъп до нея[5].

Изложението е разделено на пет глави, всяка от които е снабдена с уводна част, представяща накратко нейното съдържание и заключителна част, която резюмира концептуалните моменти, набелязани в предшестващите я страници. Първата половина на *първа глава* има въвеждащ характер и без съществени последици може да бъде пропусната от онези, които се интересуват от самата математическа теория, а не от нейната история или философски интерпретации. Във втората половина на същата глава е въведена аксиоматична дефиниция на понятието за категория, а след това тя е анализирана с помощта на вече споменатите комутативни диаграми. Във *втора глава* разглеждам свойствата и разновидностите на използваното в теорията на категориите обобщение на понятието за функция - „морфизъм“. С негова помощ въвеждам някои типични построения и релации между морфизми, а различаването на три основни типа морфизми (мономорфизми, епиморфизми и изоморфизми) ми позволява да въведа едно често използвано в математиката допускане - аксиомата за избора. *Трета глава* е посветена на понятието за „декартово затворена категория“ - категория с определена вътрешна структура, зададена посредством обекти, дефинирани чрез така наречените универсални свойства. Такива са „краен обект“, „произведение“, „изравнител“, „разслоено произведение“ и „степен“. Декартово затворените категории позволяват експлицирането на много понятия от елементарната математика и разкриват неподозирани връзки между наглед несвързани една с друга теории. Следващата, *четвърта глава*, изследва така наречените „топоси“ - декартово затворени категории, които позволяват формализирането на практически всички разсъждения, използвани в класическата математика. Този тип категории имат собствено присъщо логическо съдържание и позволяват въвеждането на различни типове логически константи (пропозиционални конективи, модалности, квантори). Техните възможности са онагледени чрез извеждането на редица класически резултати като теоремите на Кантор, Гьодел и Тарски. Последната, *пета глава*, е посветена на висшата теория на категориите, в която предмет на разглеждане са не обектите и морфизмите в отделно взета категория, а отношенията между различни категории, зададени чрез запазващи структурата им изображения, наречени „функтори“. По

[4] Тук е мястото да уточня въпроса за авторството на приведените в текста доказателства. Те могат да бъдат разделени в четири почти равночислени групи: (1) такива, които съм взаимствал изцяло от някой от текстовете, изброени в библиографията в края на книгата; (2) такива, за които съм разполагал с достатъчно подробни указания и съответно приносът ми е минимален - например в онагледяването на определени твърдения чрез комутативни диаграми; (3) такива, по отношение на които са били приведени схематични инструкции, към които съм се придържал; (4) такива, които съм построил самостоятелно. Разбира се, вероятността за поява на грешки или неточности е най-голяма по отношение на последната група.

[5] За завръщането към идеята за нагледния характер на математическото мислене, вж. Mancosu, P. 2005. Visualization in logic and mathematics. In: Mancosu, P. (ed.) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, pp. 13-30. Dordrecht: Springer.

повод на това са разгледани и „естествените трансформации“, преобразуващи един функтор в друг, както и съответните функторни категории. Анализирани са и редица фундаментални понятия като „представимост“, „еквивалентност“, „прилежание“ и „монада“. Изложението завършва с обсъждане на структурата на категорията на категориите и възможностите за нейното използване като основа на цялата математика. В заключителния параграф са илюстрирани предимствата на използвания тук подход, като са приведени абстрактни експликации на понятията „математическа теория“ и „логика“.

Обръщайки поглед назад ми се струва, че запознанството с теорията на категориите ни предоставя достатъчно адекватна представа за съвременната абстрактна математика и нейния концептуален характер. Тъкмо в това следва да бъде търсено нейното по-общо значение, както и втората част от отговора на въпроса „Защо тази книга си струва да бъде прочетена?“. Следвайки една древна, но все по-лишена от основания традиция, продължаваме да разглеждаме математиката като теория със свой собствен предмет, като наука, която се занимава с определен тип „неща“. От друга страна, последователно прилагащата методите на аксиоматизацията и формализацията съвременна математика изследва не конкретни обекти, а абстрактни структури. Изявявайки този факт, теорията на категориите нагледно демонстрира ограничеността на традиционните подходи във философията на математиката, които не просто не дават правдоподобни отговори на фундаменталните въпроси за статута на математическите обекти и същността на математическото познание, а дори не позволяват поставянето на част от най-важните нерешени въпроси. От методологическа гледна точка, тя е полезно допълнение към стандартните теоретико-множествени реконструкции, тъй като представя математиката като неспирно разрастваща се мрежа от идеи, понятия и методи, чието единство не се дължи на дълбоката им предметна основа, а е изработено чрез прилагането на утвърден в продължение на много столетия набор от концептуални инструменти. В този смисъл, теорията на категориите отмахва част от булото на теоретичните идеализации и ни позволява да надникнем в лабораторията на работещия математик, като ни въвежда в един важен аспект на неговата теоретична практика. В крайна сметка, това е *единственият* възможен начин, по който можем да добием адекватно понятие за същността на математиката. За да разберат какво е математиката, философите трябва да спрат да бъдат „шофьори от задната седалка“ (според сполучливия израз на Джоузеф Агаси), преповтаряйки утвърдени още от времето на Платон и Аристотел методологични мантри и обсъждайки въпроси, лишени от актуално значение. В този смисъл, основното убеждение, което ме е ръководело по време на писането на настоящата книга, е, че философията на математиката е възможна само като вътрешно присъща част на самата математика.

Накрая, не бих могъл да пропусна да благодаря на онези хора и институции, които направиха написването на тази книга възможно. Първоначален неин вариант беше разработен в качеството на планов изследователски проект към бившия Институт за философски изследвания към Българската Академия на Науките (настоящ Институт за изследване на обществата и знанието). При обсъждането му полезни въпроси и коментари получих от доц. Васил Пенчев, проф. Веселин Петров и проф. Мартин Табаков. Благодаря и на рецензентите, доц. Доротея Ангелова и доц. Николай Обрешков, чиято подкрепа беше много важна за мен. Признателен съм също на Иван Пунчев, чийто ентусиазъм в търсенето на пресечни точки между философията и математиката беше изключително заразителен.Понататък, както е лесно забележимо, за оформлението на текста е използван LaTeX 2_{ε}, заедно с редица стандартни програмни разширения, разработени от Американското математическо общество. Окончателният си вид той придоби благодарение на вещата намеса на Любен Козарев и Румен Хараламбиев от „Изток-Запад“. Комутативните диаграми в рамките на текста са изготвени с помощта на *XY-Pic*, а онези, които са обособени в отделни фигури - чрез *PSTricks*. Накрая, но не и по важност, бих искал да посветя тази книга на съпругата си Ина - тя прояви неприсъща за нея търпимост към заниманията ми с абстрактни безсмислици, които обхванаха толкова голяма част от съвместното ни съществуване.

София, 2 юли 2013 г.

Съдържание

Глава 1

Понятие за категория

Настоящата глава може да бъде разделена на две части. Първата от тях представлява съдържателно въведение в света на теорията на категориите и свойствения за нея начин на мислене. В самото начало накратко излагам основните методологически допускания, които са ме ръководили при писането на настоящия текст: натурализъм по отношение на философията (§1), структурализъм по отношение на математиката (§2) и инференциализъм по отношение на логиката (§3). След това накратко представям историята на теорията на категориите (§4), както и онова, което я отличава от традиционния ѝ съперник - теорията на множествата (§5). Втората част разглежда дефиницията на понятието за категория и основните похвати за анализиране на нейното съдържание. След самата дефиниция (§6), според която под „категория“ следва да разбираме съвкупност от два типа „неща“ (наричани съответно „обекти“ и „морфизми“), въвеждам така наречените „комутативни диаграми“ (§7) и анализирам с тяхна помощ свойствата на основната операция върху морфизми - тяхното съчетаване (§8), а също тъждествените морфизми, които са съотнесени на всеки обект в категорията (§9). В последния параграф разглеждам два специфични похвата, които предстои да използваме често - дуализацията на дефинициите и дефинирането чрез универсално свойство (§10).

* * *

1. Философия без метафизични претенции

В своята „Автобиография“ Вернер Хайзенберг припомня един популярен анекдот от студентските си години. В него, на въпроса „какво е философията?“ бива предложен следният закачлив отговор: „това е систематичната злоупотреба с понятия, измислени специално за тази цел“[1]. В последно време сме свидетели и на далеч по-тежки диагнози: според друг влиятелен физик, Стивън Хокинг, философията отдавна е мъртва и освободеното от нея място трябва да бъде заето от частните науки[2]. Пред какво сме изправени в случая: епизодични злонамерени атаки към една достигнала достопочтена възраст наука, или констатации на достойни за съжаление тенденции в нейната най-нова история? Нека не прибързваме с отговора на този въпрос, а преди да го потърсим да разгледаме следния прелюбопитен и пределно показателен пасаж:

> Das Dasein ist ein Seiendes, das nicht nur unter anderem Seienden vorkommt. Es ist vielmehr dadurch ontisch ausgezeichnet, daß es diesem Seienden in seinem Sein *um* dieses Sein selbst geht. Zu dieser Seinsverfassung des Daseins gehört aber dann, daß es in seinem Sein zu diesem Sein ein Seinsverhältnis hat. Und dies wiederum besagt: Dasein versteht sich in irgendeiner Weise und Ausdrücklichkeit in seinem Sein. Diesem Seienden eignet, daß mit und durch sein Sein dieses ihm selbst erschlossen ist. *Seinsverständnis ist selbst eine Seinsbestimmtheit des Daseins* ... [3]

Както ясно се вижда, този текст е написан на „немски“ език; негов „превод“ на „български“, чийто автор е Димитър Зашев, беше публикуван през 2005 г. Той има съмнителното достойнство, че дори и за миг не създава в читателя (вероятно погрешното) впечатление, че казаното от автора има някакъв смисъл. Решаващо значение в случая има това, че текстът, пасаж от който приведохме по-горе, е публикуван за пръв път през 1927 г. - по времето, когато в германските университети е разказван

[1] Вж. Heisenberg, W. (1971). *Physics and Beyond*. New York: Harper and Row, p. 30.
[2] Вж. Hawking, St. and L. Mlodinow (2010). *The Grand Design*. New York: Bantam Books, p. 1.
[3] Heidegger, M. 1967. *Sein und Zeit*. Tübingen: Max Niemeyer Verlag, p. 12.

анекдота, припомнен от Хайзенберг. В него става дума за един особен вид „биващо“, което има битийната определеност да битува така, че в самия си начин на биване е битийно свързано със своето битие. В последното изречение чуваме онова метафизично жужене, което звучи винаги, когато мисленето се залута в криволиците на езика и се оказва вплетено в тях, без да може да се върне назад, към ежедневния ни, естествен език. Този пример ясно показва, че туморът на безсмислието започва да се разраства всеки път, щом пристъпим в блатистия терен на метафизичното мислене, където нищо не можем да кажем със сигурност, защото всъщност нищо не казваме. След Кант, метафизиката живее с ясното съзнание за своето болестно състояние, но и с надеждата, че то е лечимо. Приема се, че за целта е достатъчно да очертаем ясни граници, предпазващи ни от патологичната склонност да си поставяме такива въпроси, които по самата си същност не допускат еднозначен отговор[4]. С други думи, единствено възможният отговор на метафизичните въпроси е да спрем да си ги задаваме, да разсечем Гордиевия възел, вместо да се стремим да го развържем. Изхождайки от сходно разбиране, Витгенщайн често предупреждава, че „резултатите на философията се свеждат до разкриването на елементарните безсмислици, на цициниte, с които се сдобива разсъдъкът, натъквайки се на острите ръбове, опасващи границите на езика“[5].

От друга страна, философията безспорно има и друга задача, освен да охранява границите, отделящи смисъла от безсмислието. Има „безпризорни“ въпроси, на които никой друг не може да отговори, но не защото те са особено дълбоки, а просто защото никой друг не би ги задал. Такъв въпрос е например „какво е математиката?“. Очевидно, ситуациите, при които се оказва необходимо да го поставим, съвсем не са обичайни. Самите математици рядко се занимават с подобни въпроси, изключение от това правило са единствено онези критични моменти в историята на математиката, в които се оказват проблематизирани интуитивни допускания с ключово значение за тяхната практика. През останалото време изглежда те се задоволяват с това да формулират интересни хипотези относно свойствата на даден математически обект, да доказват теореми, демонстриращи тяхната истинност, или да построяват нови теории, позволяващи въвеждането на нови обекти, съответно, поставянето на нови въпроси и извеждането на нови теореми. Наистина, смисълът на понятията „математически обект“, „математическа истина“, или „математическа теория“ не представлява интерес в рамките на самата математика, тъй като той не може да бъде установен с чисто математически средства. Ето защо, както отбелязва британският философ Майкъл Дъмет, математиците, също като своите събратя - философите, са в пълно недоумение относно техния собствен предмет на изследване[6]. Въпреки това, питането за него има не само теоретичен, а и чисто практически смисъл. От начина, по който изберем да му отговорим зависят много неща - например какво се преподава в математическите факултети или какво се публикува в математическите списания. Иначе казано, въпросът за същността на математиката има решаващо значение за нейната дисциплинарна идентичност, поради което не може да бъде отхвърлен с лека ръка. Задачата да отговори на този въпрос се пада на философията на математиката. Най-общо погледнато, възможни са два различни начина, по които можем да отговорим на този въпрос. Следвайки установената практика, ще ги нарека съответно „метод на първата философия“ и „метод на втората философия“[7]. Първият от тях е типичен за традиционната метафизика. При него първо търсим отговор на общия въпрос за природата на съществуването, истината и познанието и след като го открием (ако това изобщо се случи), прилагаме своето общо знание към частния контекст на математиката и така получаваме теория, даваща ни отговор на въпросите за природата на съществуването на математическите обекти, за характера на истинността на математическите твърдения и за спецификата на математическото познание. Иначе казано, използвайки метода на първата философия, всъщност правим първоначалната си задача неизмеримо по-трудна. Методът на втората философия е далеч по-икономичен. При него водач ни е не общото разбиране за същността на съществуването,

---

4 Вж. първа глава („Дисциплината на чистия разум“) от „Трансцендентално учение за метода“ в неговата *Критика на чистия разум* (1781/1787).

5 Вж. MS 108, 247; MS 142, 116-117; TS 210, 61; TS 212, 1184; TS 213, 425; TS 220, 90; TS 227, 87; TS 237, 90; TS 239, 81. Сходни по смисъл твърдения могат да бъдат открити още на много места в писменото наследство на Витгенщайн.

6 Вж. популярната му статия Dummett, M. 1994. What is mathematics about. In: George, A. (ed.) *Mathematics and Mind*, 11-26. Oxford: Oxford University Press.

7 За това как обикновено се прокарва разграничението между двете, вж. първата част на Maddy, P. 2007. *Second Philosophy: a Naturalistic Method*. Oxford: Oxford University Press.

истината или познанието, а ... самата математическа практика. Това изглежда съвсем разумно, доколкото взета сама по себе си математиката е най-пълният и най-достоверен отговор на въпроса „какво е математиката?“. Иначе казано, приложенията на метода на втората философия изхождат от разбирането, че поне част от типичните философски въпроси нямат собствено философски отговори. Тъкмо това разбиране изразява Витгенщайн, когато постулира, че „философията на математиката се свежда до прецизно изследване на математическите доказателства, а не до обгръщане на математиката с [метафизична] мъгла“[8]. Обикновено това пълно преобръщане на насоката на традиционната философия - от интровертно взиране в нейната собствена история, към проследяване на лъкатушните пътища на научната практика, се обозначава с термина *натурализъм*. То се свързва преди всичко с името на Уилърд Ван Орман Куайн, според когото задача на философията е не издирването на трансцендентни основания за валидност, а „завързването на свободните краища на нишката, която изприда науката“[9]. Основания за подобен ход не е трудно да бъдат намерени, тъй като познанието ни за конкретните факти далеч превъзхожда по пълнота и по сигурност познанието ни за абстрактните същности, от които традиционно се интересува метафизиката. Наистина, след като очевидно „знаем повече за това, което знаем, отколкото за това, как знаем това, което знаем“[10], то философията на математиката трябва да анализира математическата практика, а не да се опитва да ѝ предписва норми отвън. И тъй като въпросната практика е преди всичко практика на доказване, на дедуктивно обосноваване на определени твърдения, основен интерес за нея следва да представляват математическите доказателства.

2. Математика без математически обекти

Приемайки натурализма за наш водач във философията на математиката, можем да възприемем по нов начин някои от наглед непреодолимите трудности в нея. Традиционно, тя е измъчвана от онтологични или епистемологични въпроси, упорито оставащи без убедителен отговор: Какъв е статутът на теоретичните конструкти, с които борави математиката? Съществуват ли наистина изследваните от нея абстрактни обекти, или те са само удобни фикции? Каква е характерната определеност на математическото познание? Априорно, необходимо и аналитично истинно ли е то? Общото за този тип въпроси е, че те безспорно са интересни от философска гледна точка, но имат малко или никакво отношение към самата математика, тъй като техните отговори по никакъв начин не могат да окажат влияние върху нейната практика. Ако установим например, че безкрайни множества не съществуват, тъй като тяхното съществуване е несъвместимо с определен дълбоко вкоренен метафизичен постулат, това едва ли би ни предоставило основателна причина да се опитваме да преформулираме всички теореми на теорията на множествата така, че да не съдържат експлицитни позовавания на трансфинитни съвкупности. Наистина, по думите на гениалния германски математик Давид Хилберт, теорията на множествата е математически рай, от който философските скрупули трудно могат да ни прогонят[11]. Обстоятелството, че в корпуса на класическата математика се използват различни аксиоматични допускания, позволяващи строгото доказване на твърдения относно безкрайни множества, е единственото необходимо и достатъчно условие да допуснем тяхното съществуване. Да издирваме някакви метафизични указания за това отвъд практиката на работещия математик е напълно ненужно. Както посочва Куайн, в това отношение математическите обекти не се отличават съществено от електроните, биологичните видове или нациите - онтологичният статус на всички тези теоретични конструкти също се определя единствено по отношение на възприетата понастоящем теоретична рамка[12]. Така неусетно достигаме до наглед парадоксалния извод, че основна роля в развитието на философията на математиката би трябвало да играят не философите, а математиците. Наистина, по думите на Уилям Лавер, „През този [XX] век математиката не остана на едно място. В резултат, математиците, приведени над своите бюра, се оказаха принудени да разработят нови философски инструменти (успоредно с доказването на теореми, за

8 Вж. Wittgenstein, L. 2005. *The Big Typescript*, trans. C. G. Luckhardt and M. A. E. Aue. Oxford: Blackwell Publishing, p. 424, *passim*.

9 Вж. W.V. Quine: Perspectives on Logic, Science and Philosophy, interview by Bradley Edmister and Michael O'Shea. *The Harvard Review of Philosophy*, spring 1994, pp. 47-57.

10 Вж. Wang, H. (1974). *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge and Kegan Paul, p. 1.

11 Вж. Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen 95*, 161-190.

12 Вж. Quine, W. V. (1981). Success and Limits of Mathematization. In: *Theories and Things*, 148-155. Cambridge, MA: Harvard University Press.

което се предполага, че е единствен продукт на техните занимания), да се превърнат в свои собствени аристотеловци и хегеловци" (Lawvere 1992, 15).

Една от новите философии на математиката, които се раждат в лоното на съвременната математическа практика, е известна под името *структурализъм*. Основната ѝ идея е изказана от самия Лавер по следния начин: „В развитието на математиката през последните десетилетия ясно се наблюдава утвърждаването на убеждението, че отношение към математиката имат онези свойства на математическите обекти, които могат да бъдат изразени посредством тяхната абстрактна структура, а не чрез съставящите ги елементи" (Lawvere 1966, 1). Любопитна подробност е, че философите на математиката документират тази тенденция практически по същото време: (1) В своя публична лекция от 1962 г. Чарлс Парсънс констатира „непълнотата" на математическите обекти[13] (обстоятелството, че за разлика от конкретните материални обекти техните свойства са фиксирани единствено в рамките на определена структура, поради което не могат да бъдат характеризирани изчерпателно условията, при които два обекта, принадлежащи на две различни структури, следва да се считат за взаимно тъждествени); (2) Две години по-късно Куайн посочва, че множеството различни начини, по които онтологията на дадена математическа теория може да бъде сведена до онтологията на теорията на множествата показва, че никой от тях не е привилегирован - важни са не те, а общата им структура[14] (по отношение на аритметиката на естествените числа например, се използват три различни интерпретации, предложени от Фреге, Цермело и фон Нойман; макар в контекста на теорията на множествата те да се различават, всяка от тях осигурява модел на една и съща аритметична структура); (3) Възходът на математическия структурализъм през втората половина на XX век се свързва преди всичко със статията на Пол Бенасераф „Какво не могат да бъдат числата" (1965), в която година преди Лавер се казва, че „числата изобщо не са обекти, тъй като задавайки свойствата им, не характеризираме нищо повече от абстрактна структура - разликата е в това, че елементите на структурата нямат други свойства, освен онези, които ги свързват с други елементи на същата структура"[15].

Понастоящем структурализмът е доминиращата школа във философията на математиката - класически негов израз предлагат монографиите на Майкъл Резник (*Mathematics as a Science of Patterns*, 1997), Стюарт Шапиро (*Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 2000) и Чарлс Парсънс (*Mathematical Thought and its Objects*, 2008). Тези автори поддържат сходно разбиране за онтологията на математическите теории, което е известно под различни имена - „платонистки структурализъм", „*ante rem* структурализъм", „неелиминативен структурализъм". Според него математическите структури съществуват независимо от обектите, запълващи техните позиции; иначе казано, те са „самостоятелни" (freestanding)[16]. Подобно разбиране е съзвучно с математическата практика от края на XIX и първата половина на XX век, но появата на теорията на категориите има пряко отношение към въпроса за неговата допустимост. Съществена нейна отлика е свързана с възможността да бъде построена категория на всички (малки) категории, в рамките на която да бъдат изследвани свойствата на отделните категории чрез запазващите структурата им изображения между тях. Това означава, че самите математически структури (експлицирани в езика на теорията на категориите) се превръщат в обекти, вложени в една фонова структура. Също както обектите нямат собствени свойства извън обхващащата ги структура, така и структурите на свой ред нямат собствени свойства извън въпросната мета-структура. Ето защо, теорията на категориите показва, че платонизмът по отношение на математическите структури е също толкова проблематичен, колкото и платонизмът по отношение на математическите обекти. Иначе казано, използването на езика на теорията на категориите предполага едно имплицитно разбиране за математическата онтология, което за разлика от горното може да бъде определено като „номиналистки структурализъм", „*in re* структурализъм", или „елиминативен структурализъм". Както показва Илейн Ландри, „обвързаната с теорията на категориите *in re* интерпретация на математическия структурализъм твърди, че не съществуват структури, разбирани като неща, взети отделно от конкретните структурирани системи" (Landry 2006, 176-177). Причината за това

13 Текстът на лекцията му е публикуван под заглавието „Frege's Theory of Number", вж. Parsons, Ch. (1983). *Mathematics in Philosophy*, pp. 150-175. New York: Cornell University Press.

14 Вж. статията му Quine, W.V. (1964). Ontological reduction and the world of numbers. *Journal of Philosophy 61* (7), 209-216.

15 Вж. Benacerraf, P. What numbers could not be. In: Benacerraf, P. and H. Putnam (eds.). *Philosophy of Mathematics*, 272-294. New York: Cambridge University Press.

16 Shapiro, St. 2000. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press, p. 100.

е, че теорията на категориите, в качеството си на обща теория на абстрактните безсмислици, работи не *в* определена структура, а *с* нея[17].

3. Логика без логически закони

Също като математиката, логиката отдавна се намира в пълно недоумение относно своя собствен предмет. В продължение на векове, философите напразно се питат какво всъщност изследва тя: най-общите определения на съществуващото, на мисленето за него, или на изказването на същото това мислене? Битките между реализма, концептуализма и номинализма продължават и до ден днешен, без да имат пряка връзка с теоретичната практика на работещия логик. Той отдавна е изоставил своите метафизични скрупули, придържайки се към проповядвания от Рудолф Карнап принцип за толерантност, според който изборът на логическа рамка следва да се определя единствено от прагматични съображения. Дори обстоятелството, че логиката сама преминава през поредица от фундаментални трансформации, постепенно превърнали я от верен помощник на философията в самостоятелна математическа дисциплина, не успява да разсее тежката метафизична мъгла, с която са я обвили изминалите столетия. Едно от доказателствата за това е, че според Бъртранд Ръсел, един от бащите на новата логика, това, което *правим* с логическата форма не дава отговор на въпроса какво *е* тя. Ето защо той приема, че логическите константи са нещо повече от маркери, бележещи валидността на определени умозаключителни правила, че това са специфични абстрактни обекти, чиято същност трябва да бъде разкрита чрез философски анализ. Така се появява изначално съмнителната идея, че съществува и друга, философска логика, чиято задача е да схваща по квази-сетивен начин логическите форми, легитимиращи валидните изводи. Ситуацията тук е сходна с онази във философията на математиката, където догмата за съществуването на математическите обекти устойчиво генерира метафизични проблеми в продължение на цели двадесет и пет столетия. Това ни дава основание да се запитаме: съществува ли наистина някаква „философска“ логика, която не е и не може да бъде представена в математическа форма? Наистина ли трябва да търсим същността на логиката отвъд структурната определеност на валидните изводи?

Това безспорно е важен въпрос, но негов убедителен отговор отново не може да бъде издирен, поне докато оставаме в полето на спекулативната метафизика. За целта е необходимо да се вгледаме в теоретичната практика на днешната логика, която е тясно свързана със случващото се в други математически дисциплини като абстрактната алгебра, теорията на множествата и формалната аритметика. Връзките между тях подсказват, че и тук можем да очакваме появата на структуралистки идеи. Тезата, че не съществуват някакви особени обекти, които обозначават логическите константи, не е особено нова - това е основният постулат на Витгенщайновия *Логико-философски трактат*[18]. Проследяването на неизбежните следствия от приемането на тази идея отнема почти цяло столетие; един от малкото примери за това е подходът на Арнолд Козлоу, който предлага да разглеждаме логиката като математическа теория, боравеща с определен тип („импликативни“) структури[19]. Също както и в случая с математиката, основният въпрос тогава ще се отнася до начина, по който получаваме когнитивен достъп до тези структури. При това, отговорът му ще звучи по общо взето същия начин: логическите структури са детерминирани (с точност до изоморфизъм) от инференциалните релации между пропозициите, заемащи позициите на тези структури. Предвестници на тази идея са Паул Херц, Герхард Генцен и Лудвиг Витгенщайн, последният от които е достатъчно еднозначен: „Ако кажем, че това, дали p следва от q трябва да бъде определено единствено от самите p и q, това ще означава, че следването на p от q е определящо за техния смисъл“[20]. По-късно идеята, че употребите на логическите константи детерминират присъщото им значение, добива много различни форми: срещаме я в теоретикодоказателствената семантика на Даг Правиц[21], антиреалистката теория на значението на Майкъл Дъмет[22] и

---

[17] Resnik, M. 1997. *Mathematics as a Science of Patterns*. New York: Oxford University Press, p. 217.

[18] Вж. напр. пропозиция 4.0312.

[19] Koslow, A. 1992. *A Structuralist Theory of Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

[20] Вж. Wittgenstein, *The Big Typescript*, p. 231.

[21] Едно от първите зрели изложения на неговата програма е Prawitz, D. 1973. Towards a foundation of a general proof theory. In: Suppes, P. (ed.). *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, pp. 225-250. Amsterdam: North-Holland.

[22] Вж. напр. Dummett, M. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

инференциализма на Робърт Брандъм[23]. Общо за тях е това, че те отричат необходимостта значението на логическите константи да бъде търсено в някакви съдържателни интуиции, трансцендиращи съответните импликативни структури. Понятието „инференциализъм" улавя тъкмо това преобръщане на отношението между значение и употреба - употребите на дадена логическа константа в контекста на определен клас от валидни логически изводи не са детерминирани от нейния смисъл, а тъкмо обратното, смисълът ѝ се изчерпва от съвкупността на нейните употреби.

Приложенията на теорията на категориите в полето на математическата логика задълбочават това разбиране за природата на логическите константи. Наистина, ако се придържаме към известната им таблична характеризация в полето на класическата логика, те ще изглеждат като сродни членове на едно и също семейство. От друга страна обаче, ако разгледаме генезиса им в лоното на математическите структури, илюзията за тяхната еднородност изчезва. Всяка отделна логическа константа се появява в различен концептуален контекст и има свои специфични употреби (Goldblatt 1984, pp.144-145). Обща за тях е единствено функцията им: да налагат върху характеристичните функции на подмножествата на дадено множество алгебрична структура, която е изоморфна на структурата, наложена от теоретико-множествените операции върху същите тези подмножества. Иначе казано, отрицанието не е нищо повече от корелат на теоретикомножествената операция допълнение, конюнкцията - на сечението, дизюнкцията - на обединението и т.н. Относително лесно може да бъде показано също, че сходна алгебрична характеризация допускат и различните некласически логически системи. Според мен, това до голяма степен решава въпроса, за който стана дума в началото: логиката е собствена (при това не особено ясно разграничима) част на математиката. Това подсказва, че „философската" логика, мислена като критика на приложенията на математическия подход в логиката, или не разполага с основания за съществуване, или не заслужава да бъде определяна като „логика". Допълнително предимство на изложеното по-горе разбиране е свързано с обстоятелството, че то разрешава еднозначно един от най-трудните въпроси във философията на логиката: колко на брой са логическите системи и как е възможно те да бъдат повече от една, след като истинската действителност е само една, законите на мисленето репрезентират структурата на тази действителност, а правилата на съвършения логически език на свой ред въплъщават тези закони? Ако приемем, че всяка логическа система израства в контекста на определена математическа структура, а всяка математическа структура на свой ред експлицира формално определен аспект на нашето ежедневно практическо и теоретично съотнасяне със света, то логиките ще бъдат толкова на брой, колкото са и формално определимите аспекти на съществуващото, иначе казано, безброй много. При това положение очевидно би било безсмислено да се питаме, коя е „истинската" или единствено правилната логика, както и да търсим нейно съдържателно обосноваване чрез позоваване на каквито и да било същности. Тъкмо това е основното предимство на теорията на категориите: тя лишава от смисъл част от измъчвалите ни толкова дълго въпроси, като поставя на мястото на абстрактните обекти структури, лишени от претенцията да притежават умозрително постижима същност. Така остава само наистина важното: математиката, логиката и тяхната теоретична практика, която поражда и разрешава свои философски проблеми.

4. Кратка история на теорията на категориите

Както вече стана дума, през последните два века настъпва драстична промяна в начина, по който математиката мисли своя собствен предмет. Най-лесно можем да се убедим в това, ако сравним две знаменателни изказвания, първото от което датира от зората на нейната история, а второто - от времето, когато тя добива своя днешен облик. Едновременно обобщавайки практиката на античната математика и задавайки нейната бъдеща посока на развитие, Аристотел я дефинира в своята „Метафизика" като наука за количеството, която се дели на аритметика и геометрия, тъй като самото количество бива два вида - прекъснато и непрекъснато, число и фигура[24]. Това означава, че математиката изследва конкретен тип „неща", ясно дефинирана съвкупност от абстрактни обекти, които обитават сумрачната територия между материалния свят и света на умопостижимите същности. Евклид канонизира това разбиране в своите „Елементи", където основните геометрични понятия - „точка", „права" и „равнина" -

[23] Вж. напр. Brandom, R. 1994. *Making it Explicit.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

[24] Вж. *Met* 1020a7-14.

са дефинирани чрез абстракция, точно както предлага Аристотел[25]. От друга страна, според известния афоризъм на Давид Хилберт, който датира от 1891 г., геометрията на Евклид може да бъде отнесена не само до точките, правите и равнините, а до произволна система от обекти (според неговия собствен пример, халби за бира, столове и маси), чиято структура характеризират аксиомите на теорията[26]. Това означава, че във времето, което дели Аристотел от Хилберт, математиката се е превърнала от конкретна теория на абстрактни обекти в абстрактна теория на (системи от) конкретни обекти. Заслугата за това е на много различни математици - Бернард Риман и Феликс Клайн, благодарение на които геометрията се превръща в теория на класове от абстрактни структури, Джордж Бул и Огъстъс Де Морган, поставили началото на развитието на математическата логика като дял на алгебрата, Георг Кантор и Рихард Дедекинд, които полагат теорията на множествата в основите на класическата математика, Готлоб Фреге и Джузепе Пеано, с които свързваме създаването на формални езици, достатъчни за изразяването на основните математически понятия[27].

През първата половина на XX век различните национални математически школи продължават започнатото от своите предшественици - във Великобритания, Бъртранд Ръсел и Алфред Норт Уайтхед демонстрират мощта на новата математическата логика в своята *Principia Mathematica*, гьотингенската школа на Хилберт в Германия се заема с изграждането на класическата математика като формализирана аксиоматична теория, полската школа има съществен принос за развитието на математическата логика, топологията и теорията на множествата в качеството на абстрактни математически теории, кръгът „Никола Бурбаки“, обединяващ редица влиятелни френски математици, систематизира постиженията на математиката през изминалите столетия и подчертава значението на понятието „структура“, а американските „постулационни теоретици“ Елиаким Хейстингс Мур, Едуард Хънтингтън и Освалд Веблен изследват аксиоматичните експликации на различни математически структури и техните металогически свойства. Създателите на теорията на категориите Сондърс Мак Лейн и Самуел Айленберг съчетават в жизнените си траектории всички тези влияния. От една страна, Мак Лейн следва математика в Чикаго, където доминира фигурата на Мур, след това защитава дисертация в Гьотинген под ръководството на двама от учениците на Хилберт - Херман Вайл и Паул Бернайс (там има възможността да слуша и лекциите на Еми Ньотер - едно от най-големите имена в историята на абстрактната алгебра), а по-късно специализира в Харвард, където среща Уайтхед, а също Джордж Дейвид Биркхоф, Маршал Харви Стоун и Едуард Хънтингтън (три от най-големите имена в американската математика). От своя страна, Айленберг е част от полската школа в топологията - сред неговите учители са Карол Борсук (научен ръководител на дисертацията му) и Стефан Банах (водещата фигура на Лвовската математическа школа). След пристигането си в САЩ той има щастието да срещне Освалд Веблен и Соломон Лефшец в Принстън, а след това попада в университета на Мичиган, благодарение на което установява контакт с Реймънд Уайлдър и Норман Ърл Стийнрод (двама от водещите тополози в Америка). Не е за пренебрегване също и факта, че по-късно той се присъединява към кръга „Никола Бурбаки“ (по покана на самия Андре Вайл) и има възможността да работи заедно с Анри Картан - един от най-големите френски математици. Така специалистът по алгебра и логика Мак Лейн и топологът Айленберг се оказват в привилегированата позиция на съучастници в развитието на математическите идеи. Затова не е изненадващо, че срещата им по време на Втората световна война ще има трайни последици и до голяма степен ще промени лицето на днешната математика.

Сътрудничеството между Мак Лейн и Айленберг започва в началото на 40-те години и първоначално повод за него е решаването на конкретен проблем в областта на алгебричната топология - изчисляването на кохомологията на p-адичен соленоид (Mac Lane 2005, 125). По повод на това, в съвместната си статия „Естествени изоморфизми в теорията на групите“ (1942), Айленберг и Мак Лейн въвеждат понятията „функтор“ и „естествена трансформация“, което е първата крачка към тяхната нова математическа теория. Няколко години по-късно, в недалечната 1945 г., те публикуват основополагащата си статия „Обща теория на естествените еквивалентности“. Без съмнение, това не е типичен математически труд - дефинициите са много, теоремите - малко, а езикът е толкова абстрактен, че

[25] Вж. дефинициите на тези понятия в книга първа на споменатото произведение: там точката е определена като „нещо без части“, а правата - като „дължина без ширина“.

[26] За интересната история на тази фраза, вж. напр. Shapiro, *Philosophy of mathematics*, p. 157.

[27] В действителност, този списък би трябвало да е много по-дълъг, но тук няма да търсим изчерпателност, нито да се задълбочаваме в конкретните заслуги на всеки от изброените.

трансцендира ограничените диалекти на отделните математически теории. В уводната ѝ част еднозначно е посочено, че изложените в статията идеи следва да се разбират като естествено продължение на разгледаните по-горе процеси: „От метаматематическа гледна точка, нашата теория осигурява общи понятия, които са приложими във всички дялове на абстрактната математика и по този начин тя допринася към тенденцията за прилагане на един и същ подход в различните математически дисциплини“ (Eilenberg and MacLane 1945, 236). В този смисъл следва да се разбира и тезата им, че тя „може да се разглежда като продължение на Ерлангенската програма на Клайн“ (Eilenberg and MacLane 1945, 237). В своята програмна статия от 1872 г., Клайн предлага различните геометрии да бъдат класифицирани чрез симетриите им спрямо групи от трансформации. Тъй като според неговия „принцип за прехвърлянето“ ако между две геометрични пространства е налице биективно изображение, то симетриите на едното могат да бъдат прехвърлени върху другото, по същество основната идея на неговата програма се свежда до това вътрешните свойства на дадено пространство да се изследват чрез изображенията между него и други пространства (Marquis 2009, 25-26). Както ще видим, в известен смисъл, теорията на категориите наистина може да се разглежда като развитие на тази идея и разширяване на нейната приложимост към други области на математиката. От друга страна, в своя статия, публикувана доста по-късно (Mac Lane 1996a, 129), Мак Лейн определя теорията на категориите като естествено продължение на процеса на „концептуална артикулация“, чието начало поставят Хилбертовите „Основи на геометрията“ (1899). Както ясно показва известната епистоларна дискусия между Фреге и Хилберт, основната отлика на „формалисткия“ подход на Хилберт е в това, че според него съществуването на обектите на дадена теория следва да бъде изведено от нейната непротиворечивост[28]. Това означава, че при формално-аксиоматичното изграждане на дадена математическа теория не предпоставяме конкретна предметна област, съставяща областта на нейната интерпретация, а извеждаме от доказателството за нейната непротиворечивост наличието на клас от системи с обща структура. В същата статия Мак Лейн споменава и Еми Ньотер, която прилага абстрактния подход на Хилберт в областта на алгебрата. Основната отлика на нейната „концептуална математика“ (*begriffliche Mathematik*) може да бъде характеризирана чрез методологическия императив свойствата на дадена конкретна математическа система да бъдат изследвани като бъде открита нейна абстрактна характеризация, използваща единствено понятия с универсален математически смисъл. В тази връзка е важно изказването на Херман Вайл, според което най-голямата сила на Ньотер е била в това „да борави с абстрактни понятия, без да е необходимо в търсенето на нови резултати да бъде водена от познатите математически примери“[29]. Всичко това ни дава основание да определим Мак Лейн като последния математик от Хилбертовия Гьотинген, като продължител на теоретичната линия, трасирана от имената на Клайн, Хилберт и Ньотер (McLarty 2007). Съответно, както вече стана дума в увода, теорията на категориите може да се разглежда като зрял израз на идеите на концептуалната математика, на стремежа в предмет на изследване да бъдат превърнати самите математически понятия и методи.

След това кратко историческо отклонение, нека се върнем към статията на Мак Лейн и Айленберг. Както показва самото ѝ заглавие, неин основен предмет е отношението на естествена еквивалентност. За да изследват свойствата на това отношение, двамата автори въвеждат понятието „функтор“, а за да изяснят природата на функторите, те дефинират аксиоматично понятието за категория. Основание за неговото въвеждане е единствено изискването всеки функтор да има определена област и съобласт, тъй като категориите играят тази роля по отношение на функторите (Eilenberg and MacLane 1945, 247). Двамата начинатели на въпросната теория обаче, не са на едно и също мнение относно нейното бъдеще. Според Айленберг, споменатата статия представлява едновременно начало и край на историята ѝ, вероятно защото понятието за категория е пределно общо и съответно лишено от интересни свойства, които да не са тривиално следствие от дефиницията. От друга страна, Мак Лейн не е на същото мнение, тъй като не след дълго открива, че множество твърдения относно определен клас от математически структури могат да бъдат изразени чрез твърдения относно съответната категория. Това показва, че теорията на категориите представлява богат на изразни възможности език, позволяващ стандартизиране на описанието на свойствата на различни математически теории. Друг голям пробив, осъществен от Мак Лейн, е свързан с откритието, че практически всички фундаментални математически понятия могат да бъдат въвеждани посредством така наречените „дефиниции чрез универсално

[28] Вж. Bochenski, I. 1970. *History of Formal logic.* Amsterdam: North-Holland, pp. 292-293.
[29] Вж. Tent, M. 2008. *Emmy Noether. The Mother of Modern Algebra.* Natick, MA: AK Peters, p. 161.

свойство", които играят основна роля в теорията на категориите. Това отново доказва богатството на нейните изразни възможности. Съответно, през първото десетилетие от своето съществуване, тя е разглеждана като полезен инструмент, като изразно средство, осигуряващо ни възможност да изкажем по нов начин вече известни ни факти. Значението на това изразно средство е демонстрирано от два бързо превърнали се в класически текста: „Основи на алгебричната топология" (1952) от Самуел Айленберг и Норман Стийнрод и „Хомологична алгебра" (1956) от Анри Картан и Самуел Айленберг. Първото от тези две изследвания демонстрира типичния за теорията на категориите подход - тук е характеризирано аксиоматично не множество от обекти, притежаващи определен набор от свойства (например, топологични пространства), а отношенията между въпросните обекти (зададени чрез функторите между категории от топологични пространства), докато второто успява да наложи специфичната за теорията на категориите система от означения (Marquis 2009, 70).

Следващият етап от развитието на теорията на категориите започва през втората половина на 50-те години, когато Александър Гротендийк, един от най-големите математици на всички времена, дефинира аксиоматично понятието за „абелева категория" (1957), а Даниел Кан въвежда идеята за „прилежащите функтори", на които е съдено да играят изключително важна роля в бъдещото развитие на теорията на категориите. Благодарение на тези две открития идеята, че теорията на категориите е само език, който позволява да изказваме известни резултати, но не и да откриваме нови, постепенно е изоставена. Наистина, „в работите на Гротендийк категориите сами се превръщат в обект на изследване и изходна точка на различни конструкции", те вече са много повече от организираща езикова рамка (Krömer 2007, 159-160). През втората половина на последвалото десетилетие настъпва друг важен момент от развитието на новата математическа теория: появяват се първите учебници: „Абелеви категории. Въведение в теорията на функторите" (1964) от Питър Фрейд, „Теория на категориите" (1965) от Бари Мичъл, „Категории и структури" (1965) от Шарл Ересман, „Въведение в теорията на категориите и функторите" (1968) от Бучур и Делеану и „Категории и функтори" (1970) от Бодо Парейгис[30]. Междувременно са настъпили нови, не по-малко значими събития. През 1963 г. отново Гротендийк въвежда математическа конструкция, наречена впоследствие „топос на Гротендийк", а Франсис Уилям Лавер изследва в дисертацията си (с научен ръководител Айленберг и рецензент - Мак Лейн) понятието за алгебрична категория, по повод на което за пръв път е осъзнато напълно фундаменталното значение на прилежащите функтори. През следващите десетилетия Лавер се превръща в основна движеща сила за развитието на теорията на категориите: той излага аксиоматично елементарната категория на абстрактните множества (1964) и елементарната теория на абстрактните категории (1966). Те демонстрират за пръв път, че теорията на категориите е в състояние да претендира за статута на абстрактна структура, положена в основата на всички математически теории, оспорвайки несмущаваното владичество на теорията на множествата. В статията си от 1964 г. Лавер показва, че значителна част от математиката може да бъде развита без помощта на основното за теорията на множествата понятие за „елемент", което според него показва еднозначно, че „същността на математиката се свежда не до Субстанцията (както изглежда, когато третираме $\in$ като несводим предикат и със самото това приемем необходимостта да определяме всички математически понятия посредством неизменната релация на принадлежност), а до Формата (както става очевидно, когато се ръководим от инвариантна по отношение на изоморфизмите структура, зададена например чрез универсалните свойства на съответните морфизми)" (Lawvere 2005, 7). В следващата си статия, която е посветена на категорията на категориите, Лавер демонстрира друго съществено различие между теорията на категориите и теорията на множествата: макар множеството на всички множества да не съществува (тъй като въвеждането му е забранено от парадокса на Ръсел), категорията на всички (малки) категории може да бъде въведена непротиворечиво и по този начин се оказва възможно общите свойства на понятието за категория да бъдат изследвани в рамките на самата теория на категориите[31]. В светлината на

[30] Дори повърхностното сравнение на тези учебници показва драстични разминавания в структурата на изложението, използваните дефиниции на ключови понятия и системата от означения. Този недостатък не е преодолян и досега, което не е изненадващо, като имаме предвид кратката история на теорията на категориите. В този смисъл трябва да се има предвид, че настоящото изложение е всичко друго, но не и стандартно, то е плод на множество методологически избори, за които не мога да претендирам, че са единствено правилните.

[31] Парадоксът на Ръсел е предмет на разглеждане в последния параграф на четвърта глава, а категорията на категориите - в предпоследния параграф на пета глава.

казаното дотук е разбираемо защо самият Мак Лейн приема, че теорията на категориите се превръща в самостоятелна изследователска област в периода между 1962 и 1967 г., позовавайки се на работите на Гротендийк в областта на алгебричната геометрия, на Ересман в областта на диференциалната геометрия, на дисертацията на Лавер и поредицата фундаментални теореми относно така наречените „монади" (конструкция, пряко свързана с прилежащите функтори) (Landry and Marquis 2005, 6).

Краят на 60-те години е време, в което се появяват важни обобщения и конкретизации на понятието за категория: „моноидна категория" (Мак Лейн, 1963), „бикатегория" (Бенабу, 1967), „мултикатегория" (Ламбек, 1968), „доктрина" (Лавер, 1969), „елементарен топос" (Лавер-Тиерни, 1970). Последното е особено важно, тъй като елементарните топоси изчерпват теорията на абстрактните множества - това са онези множества, които са характеризирани не чрез принадлежащите им елементи, а единствено посредством универсални свойства. Следващият етап от развитието на теорията на категориите е свързан с осъзнаването на нейното значение по отношение на формалната логика. Първите стъпки в тази посока са направени отново от Лавер, който акцентира върху логическото значение на прилежащите функтори в редица свои статии от края на 60-те и началото на 70-те години. Нови важни открития са направени в началото на същото това десетилетие: Йоахим Ламбек прилага съответствието на Къри-Хауърд в рамките на теорията на категориите като по този начин характеризира абстрактната структура на дедуктивните теории (1971), Мичъл и Бенабу въвеждат така наречения „вътрешен език" на даден елементарен топос, който позволява да бъде установено съответствие между теорията на категориите и теорията на моделите (1972), Андре Жоял въвежда „семантиката на Крипке-Жоял", която експлицира свойствата на кванторите в теоретико-категорен контекст (1975), а Ржван Дяконеску установява връзката между аксиомата за избора и законите на класическата логика (към този списък трябва да добавим и по-късните приноси на Гонзало Рейес към експлицирането на модални понятия в рамките на теорията на категориите). От края на 70-те години датират и първите мащабни проекти за реконструиране на съвременната математика въз основа на теорията на категориите. Сред тях споменаване заслужават „локалната теория на множествата" (Боало-Жоял-Зангвил, 1977) и „алгебричната теория на множествата" (Жоял-Мьордийк, 1995). В тази връзка трябва да споменем също приносите на Питър Фрейд, който реконструира основите на теорията на числата (1980) и теорията на релациите (1990) в контекста на теорията на категориите. В края на този кратък преглед е мястото на едно съвсем скорошно развитие в областта - програмата на Владимир Воеводски за унивалентно обосноваване на математиката (2010). Тъй като тя използва широко идеи и концептуални инструменти, развити в контекста на теорията на категориите, въпросната програма е едно от доказателствата за нейния евристичен потенциал[32].

За настоящия текст по-съществено значение имат опитите да бъде изградена мотивирана от теорията на категориите философия на математиката. Налице са три основни направления в тази област: диалектическия материализъм на Лавер, набелязан още в статията му „Квантори и снопове" (Lawvere 1970), формалисткия функционализъм на Мак Лейн, изложен в книгата му „Математиката: форма и функция" (Mac Lane 1986) и структуралистките основи на абстрактната математика, проектирани от Михали Маккай в редица негови статии (Makkai 2002). Към всичко това можем да добавим приложенията на теорията на категориите в други научни области, които бързо се умножават през последните две десетилетия. Ето някои характерни примери: (1) *Компютърни науки.* Възможността теорията на категориите да бъде използвана за изследване на алгебричните структури, свързани с теорията на изчислимостта, е осъзната доста бързо: свидетелство за това е сборникът на Арбиб и Манес „Машини в категория" (1974), както и основополагащата монография на Айленберг „Автомати, езици и машини" (1976). От друга страна, Джоузеф Гоген и Род Бърстал формулират така наречената „теория на институциите", която превръща теорията на категориите в инструмент за анализиране на структурата на компютърните програми (1984), Ерик Вагнер развива техниката на теоретико-категорната алгебрична спецификация (1986), а Жан-Ив Жирар прилага идеи от теорията на категориите в своята „линейна логика" (1987) и „геометрия на взаимодействието" (1989). Едно от по-новите приложения на теорията

32 Програмата на Воеводски може да се разглежда като синтез на различни идеи, почерпени от теорията на категориите и конструктивната теория на типовете. Нейните задачи са две: формализиране на големи дялове от класическата математика и разработване на техники за автоматично доказване на теореми. По своята величина, този замисъл е сравним единствено с програмата на Хилберт. Предстои да видим, докъде може да бъде доведен той - през академичната 2012/2013 година, Институтът за фундаментални изследвания в Принстън включва програмата на Воеводски сред приоритетните си изследователски проекти.

на категориите в теорията на програмирането е свързан с така наречените компютърни онтологии, в тази връзка основна роля отново играе Гоген (2004). Споменаване заслужават също понятията за коалгебра и бисимулация, чиято фундаментална значимост за теорията на програмирането беше осъзната относително наскоро[33]; (2) *Физика.* Джон Без и Джеймс Долан използват едно от обобщенията на теорията на категориите (теорията на n-категориите) в своята топологична квантова теория на полето (1995). По-късно, през 2004 г. Соломон Абрамски и Боб Кьоке въвеждат формализма на „кинжалните категории“ (*dagger categories*), а Рос Стрийт и Брайън Дей изследват квантовите категории - категории, съставени от квантови групоиди. В този контекст трябва да споменем още прилагането на формализма на теорията на топосите към квантовата механика, свързано с имената на Кристофър Ишам и Андреас Дьоринг (2007)[34]; (3) *Философия.* Теорията на категориите има два основни типа употреби в рамките на философията на математиката: от една страна, във връзка с въпроса за нейното обосноваване (който ще засегнем в следващия параграф), а от друга, във връзка с математическия структурализъм (който накратко беше разгледан във втори параграф на първа глава). Първият от тези въпроси става популярен през 70-те години, най-цитираният източник в тази връзка вероятно е критичната статия на Соломон Феферман (Feferman 1977), а вторият е особено интензивно обсъждан в последните петнайсет години - началото на споровете поставя Стив Авоуди (Awodey 1996). Извън контекста на философията на математиката, забележително приложение на идеите на теорията на категориите представлява „Потокът на информацията: логика на разпределените системи“ на Джон Баруайз и Джери Селигман (1997). Както показва заглавието, тук е предложена формално-логическа реконструкция на понятието за информация, чийто основен елемент са така наречените инфоморфизми (трансформации, мислени по аналогия с морфизмите в теорията на категориите). По-нататък, в статията си „Теория на прилежащите функтори и някои мисли за тяхното философско значение“ (2006), Дейвид Елерман използва теорията на категориите в анализа на традиционното Платоново разбиране за универсалиите, а други негови работи прилагат същия формален конструкт (прилежащите функтори) при експликацията на свойствата на сложни самоорганизиращи се системи (2007). Накрая можем да споменем и друга известна употреба на теорията на категориите, този път в областта на социалната онтология (както често се случва във философията, трудно е да кажем, дали в случая става дума за „употреба“, или за „злоупотреба“). Това е обемистата монография „Логики на световете“ (2007) на Ален Бадиу, в която е формализирана структурата на политическите процеси. Всички тези автори използват (по един или друг начин) онзи специфичен начин на мислене, който съпътства теорията на категориите. В следващия параграф ще се вгледаме в неговите отличителни черти.

5. Същност на теорията на категориите

Преди всичко тук е мястото да разберем защо теорията на категориите се казва така. Наистина, „категория“ е дума с дълга философска история - въведена е още от Аристотел, който с нея обозначава начините, по които казваме нещо за нещо. Кант също използва това понятие, с чиято помощ именува общите понятия, чрез които ни се дават обектите в опита. Какво е общото между категориите на Аристотел и Кант и разглежданата тук математическа теория е пояснено в следния занимателен пасаж, който откриваме в нейната „библия“ - „Категории за работещия математик“ от Сондърс Мак Лейн:

> Въвеждането на толкова общи идеи се дължи преди всичко на готовността да се отдадем на безразсъдни и лишени от основание празни абстракции, която в настоящия случай е стимулирана от насладата, с която крадем думи от философите[35]: понятието „категория“ идва от Аристотел и Кант ... (Mac Lane 1971, p. 29-30).

Следващият естествен въпрос, който възниква по този повод е: какво точно представляват математически обекти от гледна точка на теорията на категориите? В книгата си „Математиката: форма и функция“, Маклейн разглежда тяхното възникване като естествено продължение на типичните за

[33] Вж. Sangiorgi, D. 2011. *Bisimulation and Coinduction.* Cambridge: Cambridge University Press.

[34] Значението на теорията на категориите за развитието на съвременната физика демонстрира например сборника Coecke, B. (ed.). 2011. *New Structures for Physics.* Berlin: Springer.

[35] Оказва се, че „кражбата“ всъщност не е лишена от основания, тъй като „една от поразителните особености на тази теория е в това, че тя изниква винаги, когато трябва да бъдат изяснени концептуалните основания на даден въпрос или определена математическа област“ (Marquis 2009, 2).

човешката култура дейности. Изследвайки абстрактната структура на броенето например, неизбежно стигаме да понятието за следване (тъй като когато броим, преминаваме от едно нещо към следващото в редицата). На свой ред, естествените числа се появяват като въплъщение на абстрактната идея, че следването е неограничено и броенето може винаги да бъде продължавано произволно. Това, разбира се, не е чисто умозрително построение, а практически приложима идея - числата, мислени като етикети, с чиято помощ можем да наложим наредба на произволна съвкупност, колкото и голяма да е тя, са изключително полезен инструмент в изследването и управлението на процеси в реалния свят. По аналогичен начин можем да въведем и други основни математически обекти[36]:

Дейност	**Идея**	**Обект**
броене	наредба	ординално число
групиране	количество	кардинално число
деформиране	свързаност	топологично пространство
доказване	изводимост	логическо следване
измерване	разстояние	реално число
оформяне	симетрия	група
планиране	случайност	вероятност
преместване	движение	трансформация
разделяне	част	булева алгебра
събиране	съвкупност	множество

Фигура 1. Генезис на математическите идеи (по Мак Лейн)

Това съвсем не означава, че математиката има непосредствено отношение към тези дейности - неин предмет са неща, които са „извлечени“ от околната им среда, или по-скоро самата процедура на тяхното извличане (Mac Lane 1986, 418). Иначе казано, математиката е *формална* наука - тя се интересува не от конкретни обекти, дадени в сетивния опит (неща, които броим, разстояния, които измерваме, сложни съвкупности, които делим на части), а от общите правила, в съгласие с които боравим с тези обекти. В тази връзка е важно да не забравяме, че идеите на Мак Лейн във философията на математиката са формирани не другаде, а в Гьотинген, където по това време все още е силно влиянието на феноменологията на Хусерл (McLarty 2007, 11-12). Понятието „форма“ (Gebilde) има пряка връзка с феноменологическата концепция за ейдетичната редукция - онази специфична мисловна процедура, подлагаща на вариране несъществените черти на даден предмет, така че да остане само общото и същественото[37]. Формално-аксиоматичното третиране на даден математически обект е по същество същото - улавяне на общото за даден клас от модели и изразяването му чрез връзките между променливите във формален език, зададени чрез аксиомите на теорията. Иначе казано, математиката изследва не непостижими платонови светове, а осезаеми формални системи, възникващи при анализа на конкретни човешки дейности (Mac Lane 1981, 470), тя е специфичен тип дейност, която съпътства и направлява останалите. Ето защо, онази формалистка философия на математиката, която Хилберт поставя в основата на своята метаматематическа програма, а Мак Лейн продължава в своя „формалистки функционализъм“, не е нищо повече от естествено продължение на самата математическа практика. С нея е свързан друг важен аспект на математиката, който беше обсъден по повод на въпроса за математическия структурализъм:

> не определяме какво „е“ естествено число, взето само по себе си. Вместо това определяме системата на всички естествени числа, снабдена с операцията „наследник“ ... Теорията на числата, също както други дялове на математиката, не изследва конкретен модел или конкретна аксиоматична система, а по-скоро форма, представена в различните модели и определена посредством аксиомите (Mac Lane 1986, 59).

Иначе казано, структурализмът не е нищо повече от другото лице на формализма - математиката изследва абстрактни структури тъкмо защото е формална наука. От друга страна, след като вече са налице определени математически структури, извлечени от жизнения ни опит и теоретичното ни

[36] Вж. (Mac Lane 1981, 463), (Mac Lane 1986, 34) и (Mac Lane 1992, 11).

[37] Вж. Husserl, E. 1973. *Experience and Judgment*, trans. J. S. Churchill and K. Ameriks. London: Routledge, §87.

отнасяне към света, изглежда естествено да се запитаме: Какво е структура? Този наглед невинен въпрос всъщност е от решаващо значение, тъй като повечето от онези, които сами определят себе си като „структуралисти“, срещат непреодолими трудности в търсенето на неговия отговор. От друга страна, в рамките на своята теоретична позиция Мак Лейн лесно успява да стигне до него:

> ... по същността си структурата е списък от операции и релации със зададени по аксиоматичен път свойства; често тези свойства споделят множество различни типове математически обекти. Даден математически обект „има“ определена структура когато определени негови аспекти удовлетворяват (стандартния) списък от аксиоми за тази структура. Това понятие за „структура“ възниква в следствие от широката употреба на аксиоматичния метод в математиката (Mac Lane 1996b, pp. 174, 176).

Така той преодолява наглед съкрушителното възражение на Феферман срещу опитите за изграждане на математиката, които използват в качеството на нейна основа теорията на категориите, а не теорията на множествата: „обяснявайки общото понятие за структура и характеризирайки различни конкретни структури ... имплицитно предпоставяме идеите за операция и съвкупност“ (Feferman 1977, 150). От една страна, теорията на категориите наистина борави с понятието за съвкупност (или за наредена съвкупност - списък), но това понятие е много по-бедно от понятието за множество, което експлицира стандартната аксиоматика на теорията на множествата ZFC. От друга страна, както ще видим в трета глава, понятията за операция и релация могат да бъдат въведени в контекста на теорията на категориите без пряко позоваване на понятието за съвкупност. Наистина, множествата не са нищо повече от определен тип категории (наричани „дискретни“), които са с минимална вътрешна структура: „множествата нямат структура, която функциите между тях запазват“, изключение от това правило са само онези техни аспекти, които са свързани с въпросите за съществуването и идентичността на техните елементи (McLarty 1990, 365). В този смисъл, теорията на категориите може да се разглежда не като алтернатива, а по-скоро като обобщение на теорията на множествата[38]. Наистина, категорията на абстрактните множества е полезен инструмент в рамките на теорията на категориите (както показва обсъждането на представимите функтори и лемата на Йонеда в пети параграф на пета глава), а някои теоретико-множествени допускания играят важна роля при обсъждането на статута на категорията на категориите (например аксиомата за универсумите на Гротендийк, въведена в началото на девети параграф на същата глава), но от това не следва, че теорията на категориите е сводима по някакъв начин до теорията на множествата.

Една от най-важните задачи на философията на математиката е да преодолее дълбоко загнездилия се теоретикомножествен редукционизъм - идеята, че всеки математически обект по своята същност *е* множество. Гледната точка на теорията на категориите е изключително полезна в това отношение, тъй като тя изхожда от допускането, че всеки математически обект има неограничено много локални реализации в различни теоретични контексти и обща за тях е единствено структурната им определеност. В следствие от това може да се твърди, че изразената на езика на теорията на категориите математика се различава същностно от нейната теоретико-множествена алтернатива:

> Локалната интерпретация на математическите понятия, основана на теорията на категориите, има същностно релационен характер. От нейна гледна точка, значението на дадено математическо понятие ... не се свежда до съществуващ сам по себе си обект, чиято същност е независима от тази на останалите неща, а характерните му свойства са му вътрешно присъщи. Напротив, свойствата на математическите обекти сега се определят по отношение на целокупността на отношенията им с други обекти (Bell 1986, 418).

Подобен подход ни дава и отговор на въпроса за дисциплинарната идентичност на математиката - ако дадена формална теория е част от мрежата, детерминираща смисъла на понятия, които отпреди сме решили да считаме за математически, то тя също е математическа. Така границите между математиката и останалите науки постепенно започват да избледняват, а загадката на „необяснимата ефективност“ на математиката спира да ни озадачава - ако математиката е наука за абстрактните структури, то не съществува разлика между чистата математика, която изследва безплътни идеи, обитаващи Платоновия свят, и приложната математика, която изследва конкретни обекти, които са част от физическата вселена. Макар да ни се представя с много лица, също като морския старец Протей,

[38] Вж. обсъждането след дефиницията за n-категория в предпоследния параграф на пета глава.

математиката е само една и тя е налице винаги, когато съдържание на мислите ни е формата. Това е практическата философия на математиката, която можем да изведем от теорията на категориите. Придържайки се към този начин на мислене, не трябва да забравяме, че тя „възниква не като алтернативен метод за полагане на основите на математиката, а в отговор на математическата потребност от език и методи, пригодни за решаването на проблеми, свързани с различен тип математически структури“ (Awodey 1996, 212). Тъкмо основните елементи на този език ще ни занимават в следващия параграф.

6. Дефиниция за категория

Не е възможно човек да бъде подготвен предварително за първата си среща с теорията на категориите. Съвсем не е странно, че дори математиците, чието опитно око е привикнало към всякакви странности, понякога срещат известни трудности в боравенето с нейните понятия и методи. Без съмнение, причината за това е, че те са толкова смайващо абстрактни, че лишават от познатото им одеяние дори най-привичните за нас математически структури. Ето защо, теорията на категориите е един опасен лабиринт, в който лесно можем да се изгубим. Макар в центъра на този лабиринт да не дреме митичния Минотавър, ние все пак имаме нужда от своеобразна нишка на Ариадна, която да ни преведе през криволичещите му пътища. Такова сигурно ръководство осигуряват дефинициите, които изреждат съществените признаци, характеризиращи еднозначно разглежданото понятие. Ето защо, първата ни задача ще бъде да разгледаме приведеното по-долу определение:

Дефиниция 1. Системата $\mathfrak{C}$ ще наричаме *категория*, ако тя обхваща два типа съвкупности, чиито елементи наричаме съответно $\mathfrak{C}$-*обекти* (означавани с големи латински букви: A, B, C, $\ldots$) и $\mathfrak{C}$-*морфизми* (означавани с малки латински букви: f, g, h, $\ldots$), за които е в сила следното:

(1) На всеки $\mathfrak{C}$-морфизъм f са съотнесени операциите $dom(f)$ (*област* на f) и $cod(f)$ (*съобласт* на f) , за които $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, където A и B са дадени $\mathfrak{C}$-обекти (без да допускаме, че задължително $A \neq B$).

(2) На всяка двойка $\mathfrak{C}$-морфизми f и g, за които $dom(g) = cod(f)$ е съотнесена операция $g \circ f$ (*съчетание* на f и g), задаваща нов морфизъм, за който са изпълнени следните две равенства: $dom(g \circ f) = dom(f)$ и $cod(g \circ f) = cod(g)$. Освен това, тази операция е *асоциативна*: ако са ни дадени три морфизма f, g, h за които $dom(g) = cod(f)$ и $dom(h) = cod(g)$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(3) На всеки $\mathfrak{C}$-обект A е съотнесен $\mathfrak{C}$-морфизъм id_A (*тъждествен морфизъм* на A), за който $dom(id_A) = cod(id_A) = A$, така че са налице следните зависимости: за произволна двойка $\mathfrak{C}$-морфизми f и g, за които $cod(f) = dom(g) = B$, е изпълнено $id_B \circ f = f$ и $g \circ id_B = g$.

По повод на тази дефиниция следва да бъдат направени следните уточнения:

- Една от основните разлики между функциите в основаната на теорията на множествата математика и морфизмите, които са техен аналог в теорията на категориите, е свързана с това, че въвеждайки дадена функция, математиците обикновено задават еднозначно нейната дефиниционна област X и се задоволяват да отбележат, че $f(X) \subseteq Y$, където Y е произволно множество, включващо множеството от стойностите на f. От тази гледна точка, експлицитното фиксиране на съобластта на морфизма изглежда като ненужно усложнение. От друга страна, в топологията например е обичайна практика да се фиксират и двете страни на изображенията между топологични пространства. Поради това не е изненадващо, че стандартното за теорията на категориите означение за морфизъм всъщност е взаимствано от топологията (McLarty 1990, 354-355).
- Операцията „съчетание“ е ключовият инструмент на теорията на категориите. Ето защо може да се твърди, че докато теорията на множествата е теория на първичната релация „принадлежност“ (на елемент към множество), то теорията на категориите е теория на първичната операция „съчетание“ (на морфизми). Концептуалната разлика между едната и другата отчасти е следствие на това, че релацията на принадлежност е статична, тя борави с отпреди налични обекти, докато съчетанието има динамичен характер - можем да приемем, че при него се генерира нов морфизъм въз основа на вече наличните.

- Както посочват Айленберг и Мак Лейн в основополагащата си статия, взаимно еднозначното съответствие между обектите и техните тъждествени морфизми подсказва възможността първите да бъдат заместени с вторите, което ни дава теория със само един тип променливи, върху които са дефинирани операциите *dom*, *cod* и $\circ$ (Eilenberg and MacLane 1945, 238). Иначе казано, можем да разглеждаме обектите като особен вид тривиални трансформации, които „не правят нищо“.

Не е трудно да открием множество примери за системи, които удовлетворяват горната дефиниция. Аритметиката на естествените числа например, очевидно ще изпълнява изброените в нея изисквания. За да се убедим в това, нека интерпретираме различните числови множества като обекти, а функциите, приемащи съответно за аргументи и стойности елементите на тези множества - като морфизми. При това положение, областта на морфизма ще обхваща дефиниционната област на функцията, а неговата съобласт - множеството от стойностите на функцията за всеки от нейните аргументи. Тогава съчетанието на две функции $f(x)$ и $g(x)$ ще бъде нова функция $h(x)$, определима чрез равенството $h(x) = g(f(x))$, а тъждественият морфизъм - тривиалната функция $f(x) = x$, която съотнася всеки аргумент на самия него. От друга страна всеки, който се опитва да състави списък с покупки на необходимите му продукти, без да е наясно с това, разсъждава в рамките на конкретна категория: нейни обекти са различните възможни списъци с покупки ({банани, ябълки}, {круши, праскови, лимони} и т.н.), а морфизми - операциите, при които добавяме нови елементи към списъка („записал съм си банани и ябълки, няма да е лошо да купя и лимони ...“) или премахваме част от старите („след като ще купя круши и праскови, май лимони няма да ми трябват ...“). Тогава област на морфизма ще бъде старият списък, съобласт на морфизма - обновеният списък, съчетание на морфизми - две последователни преразглеждания на изходния списък, а тъждествен морфизъм - действието, при което обхождаме с поглед списъка и не откриваме нищо, което трябва да бъде добавено или изключено от него. От този момент насетне съвсем съзнателно ще използваме тези два толкова несходни типа примери (с числа и списъци), тъй като всеки път те ще ни показват нагледно, че математиците, доказващи теореми относно числата, си имат работа с някакви особени математически обекти точно толкова, колкото и купувачите, застинали в колебание пред щанда с лимони.

Според дефиницията на понятието за категория, на всеки обект трябва да бъде съпоставен неговия тъждествен морфизъм. Съществуването на никакви други морфизми не следва от нея. Това показва, че е възможно да има категории, в които всеки морфизъм е тъждествен морфизъм. Тяхното название е въведено в следната дефиниция:

Дефиниция 2. Дадена категория $\mathfrak{C}$ се нарича *дискретна*, ако всеки морфизъм в нея е тъждествен морфизъм.

Иначе казано, в дискретните категории е налице взаимно еднозначно съответствие между обекти и морфизми. Това ни дава основание да разглеждаме произволно множество, снабдено с тривиален автоморфизъм, като дискретна категория. Иначе казано, теорията на множествата може да се разглежда като частен случай на теорията на категориите - последната е нейно нетривиално обобщение, получено чрез въвеждане на допълнителна структура, която се характеризира чрез морфизмите в категорията.

Тук е мястото да направим едно изключително важно уточнение - не трябва да забравяме, че определението на понятията „обект“ и „морфизъм“ е относително спрямо разглежданата категория: нещо, което е морфизъм в $\mathfrak{C}$ може да бъде обект в друга категория $\mathfrak{D}$. Ако се върнем към примера със списъците, можем лесно да се убедим в това: нека съставим нова категория, в която обекти са конкретните процедури на преразглеждане на списъците (например: „Ако списъкът е $A = \{$банани, ябълки$\}$, то му съотнеси $A' = \{$банани, ябълки, лимони$\}$“, „Ако списъкът е $B = \{$круши, праскови$\}$, то му съотнеси $B' = \{$круши, праскови, лимони$\}$“ и т.н.), а морфизми са трансформации на самите процедури на преразглеждане (например, „замести *лимони* с *портокали* в *добави към списъка лимони*“). Тогава ще бъдат изпълнени всички изисквания, формулирани в дефиницията за категория: съчетанието на два морфизма ще бъде асоциативнои същевременно за всеки обект ще бъде налице тъждествен морфизъм.

След тези уточнения ще въведем редица допълнителни означения, които ще ни бъдат от полза при излагането на теоремите, изявяващи свойствата на понятието за категория.

Забележка 1. За даден морфизъм f, (a) ако $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, ще пишем $A \xrightarrow{f} B$; (b) ако f е тъждествен морфизъм, ще пишем $A \xrightarrow{f} A$ или $A \circlearrowright f$ което показва нагледно, че областта и съобластта на f съвпадат[39].

Накрая, трябва да обърнем внимание на употребата на знака за равенство във формули като $dom(g) = cod(f)$ и $f = g$. В приведената по-горе дефиниция за категория се срещат изрази и от двата вида, което налага да обясним какъв е смисъла на знака „=“ във всеки от тях. Когато твърдим, че $cod(f) = dom(g)$, това означава, че в съответната категория съществуват два морфизма (f и g) със свойството, че съобластта на единия (f) *съвпада* с областта на другия (g). Иначе казано, в разглежданата категория съществува обект A, за който са едновременно изпълнени следните две равенства: $A = cod(f)$ и $A = dom(g)$. Следователно, в случая изразите $cod(f)$ и $dom(g)$ имат едно и също значение, тъй като препращат към един и същ обект (който по-горе означихме с A). От друга страна, ако ни е даден израз от типа $f = g$, където f и g са морфизми в дадена категория $\mathfrak{C}$, то отново ще казваме, че f *съвпада* с g. Това твърдение означава, че (1) $dom(f) = dom(g)$ (областите на f и g съвпадат); (2) $cod(f) = cod(g)$ (съобластите на f и g съвпадат); (3) f и g съотнасят на едни и същи елементи на своята област едни и същи елементи на своята съобласт. Например, ако f и g са числови функции, то ще считаме, че те съвпадат тогава и само тогава, когато имат една и съща стойност за всяко естествено число. (Очевидно, това не е истинска дефиниция, тъй като понятието „елемент“ беше пояснено единствено чрез пример от аритметиката. Този пропуск ще бъде премахнат след като в следващата глава въведем определението за краен обект в дадена категория. Често ще прибягваме към тази стратегия: ще въвеждаме понятия без дефиниция и ще обосноваваме истинността на отнасящи се до тези понятия твърдения посредством съдържателно разсъждение, а впоследствие ще добавяме нужните дефиниции и доказателства. Този начин на процедиране вероятно изглежда странен, но всъщност е напълно оправдан: интуицията не е враг, който трябва да бъде прогонен от математиката, а аспект на неформалната дедуктивна практика, която нормализира съответната формализация.)

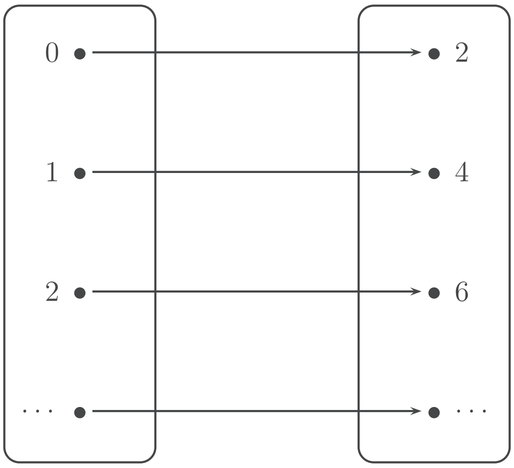
7. Комутативни диаграми

Абстрактната структура на дадена категория може да бъде представяна чрез два типа диаграми, които наричаме съответно *вътрешни* и *външни*. За да разберем какво представляват те, нека се върнем към въведения по-горе пример с числовите множества и аритметичните функции. Те детерминират категория, в която даден морфизъм, например аритметичната функция $f(x) = 2 \times (x + 1)$, не е нищо повече от правило, по което на всеки елемент на областта на морфизма (т.е., на всяко естествено число) може да бъде съпоставен елемент на съобластта на морфизма (т.е., определено четно число). Иначе казано, морфизмът може изчерпателно да бъде описан посредством следната система от съотнасяния: $0 \mapsto 2, 1 \mapsto 4, 2 \mapsto 6, \ldots$.

Такива системи от съотнасяния се изобразяват нагледно чрез така наречените „вътрешни комутативни диаграми“. Това са елементарни графични обекти, съставени от (придружавани от етикети) точки (които представят елементите на обектите в категорията), стрелки между тях (характеризиращи конкретната процедура, чрез която даден морфизъм съотнася елементи на своята съобласт на елементите на своята област) и затворени криви (чиято вътрешност определя принадлежността на отделните елементи към даден обект). Диаграмите се наричат „вътрешни“, защото представят вътрешната структура на обектите в категорията и „комутативни“, тъй като имат следното свойство: ако следвайки стрелките можем да стигнем по два различни пътя от A до B, то тези два пътя съвпадат (иначе казано, съчетанията на съставящите тези пътища морфизми съвпадат). Нека сега разгледаме един пример, който ще ни позволи да си изясним природата на вътрешните диаграми. Парадоксът на Галилей (според който множеството на естествените числа може да бъде поставено във взаимно еднозначно съответствие с множеството на четните числа) е представен на фигура 2.

На тази вътрешна диаграма са представени схематично два обекта (съответно, множествата на естествените и четните числа) и е показано как можем да съпоставим различен елемент на втория

39 Същото означение ще използваме и за всеки друг морфизъм, чиято област и съобласт съвпадат; както ще видим, морфизмите от този тип се наричат ендоморфизми.

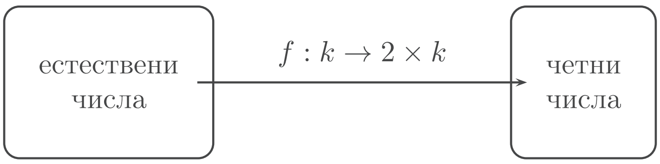


Фигура 2. Парадоксът на Галилей: вътрешна диаграма

обект на всеки елемент на първия обект (съпоставянето се осъществява чрез функцията f, за която $f(0) = 2$, $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $\ldots$ В тази връзка е важно да припомним, че понятието морфизъм обобщава понятието за (числова) функция, и поради това ще се придържаме към изискването никога да не съпоставяме на един и същ елемент на областта на морфизма различни елементи на неговата съобласт. Причината за това е, че дадена функция никога не дава различни стойности за една и съща стойност на аргумента.

Ако премахнем етикетите (в случая, числата) очевидно ще получим диаграма, която носи по-малко информация за разглеждания морфизъм: вече няма да знаем какъв точно е начина, по който съотнасяме един елемент на друг, но все още ще знаем други неща, например, че нито един елемент на съобластта на морфизма не е „образ“ на два различни елемента на неговата област. Такива графични обекти са тип вътрешни диаграми, които ще използваме често по-нататък, тъй като ще ни интересува не конкретната определеност на дадена категория, или специфичните отношения между елементите на обектите в нея, а общите свойства на всички системи, които реализират съответната структура.

От друга страна, ако се абстрахираме от вътрешния строеж на обектите в категорията и конкретните начини, по който биват съотнасяни техните елементи, ще получим нейна „външна“ диаграма. В случая ще използваме букви за означаване на обектите в категорията, а стрелките ще означават морфизмите между тях. Ако се върнем към парадокса на Галилей, можем да му съпоставим следната външна диаграма:



Фигура 3. Парадоксът на Галилей: външна диаграма

Най-елементарният тип външна диаграма, който ще срещаме отново и отново, се нарича „комутативен триъгълник“ (вж. фигура 4). Тя има нова особеност: една от стрелките е пунктирана. Ще използваме това означение тогава, когато съответният морфизъм е изцяло детерминиран от останалите представени на диаграмата морфизми и може да бъде въведен като тяхно съчетание. Наистина, според дефиницията за категория, на всеки два морфизма f и g, които притежават свойството, че $cod(f) = dom(g)$ може да бъде съпоставено тяхното съчетание $g \circ f$, за което съответно е изпълнено следното: $dom(g \circ f) = dom(f)$ и $cod(g \circ f) = cod(f)$. Следователно, ако са ни дадени морфизмите $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, то имаме право да въведем нов морфизъм h с $dom(h) = A$ и $cod(h) = C$. Това означава, че комутативният триъгълник ABC може да бъде зададен единствено чрез обектите A, B и C и морфизмите f и g, тъй като съществуването на h следва от дефиницията за съчетание на морфизми. При това, въпросният триъгълник е определен като „комутативен“, тъй като в него очевидно съществуват два идентични „пътя“ от A до C: (1) обиколен (през B чрез съчетаване на g с f); (2) пряк (чрез h). За тези два пътя казваме, че са идентични, тъй като морфизмът h беше въведен чрез равенството $h = g \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, "h(= g \circ f)"] & \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Фигура 4. Комутативен триъгълник

8. Свойства на съчетаването

След като се запознахме с начините, по които можем да представяме структурата на дадена категория чрез комутативни диаграми, нека разгледаме свойствата на морфизмите, които бяха изказани в дефиницията за категория. Според тази дефиниция, съчетаването на морфизми е асоциативна операция (вж. дефиниция 1.2). Значението на това твърдение може да бъде представено чрез следната диаграма:

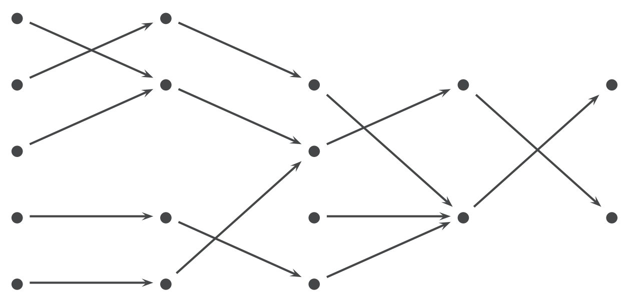
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, dashed, bend right, "g \circ f"] \arrow[rrr, dashed, bend left=50, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rrr, dashed, bend right=50, "h \circ (g \circ f)"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, dashed, bend left, "h \circ g"] & \mathrm{C} \arrow[r, "h"] & \mathrm{D}
\end{tikzcd}$$

Фигура 5. Асоциативност на операцията $\circ$

Нека да анализираме нейното съдържание. Очевидно, съчетаването на f, g и h може да бъде представено по два различни начина: (1) Можем първо да съчетаем f и g и след това да съчетаем $g \circ f$ с h като по този начин получаваме морфизма $h \circ (g \circ f)$; (2) Можем първо да съчетаем g и h и след това да съчетаем f с $h \circ g$ като по този начин получаваме морфизма $(h \circ g) \circ f$. Твърдението, че операцията съчетание е асоциативна ни гарантира, че поредността, в която извършваме съчетаването на морфизмите в диаграмата е без значение, поради което винаги $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. По силата на това имаме правото в подобни случаи да пропускаме скобите и да пишем просто $h \circ g \circ f$.

Ето пример за вътрешна (неетикетирана) диаграма, с чиято помощ можем да си изясним значението на изискването за асоциативност на композицията (вж. фигура 6). На диаграмата са представени схематично няколко последователни фази от една сложна процедура, през която преминава всяка година всяко семейство: изборът на подаръци за Коледа. Да допуснем, че в даден момент (представен чрез обекта A) всеки от членовете на семейството (двама родители и три деца) предлага свой списък от желани подаръци. Задачата е всички тези списъци да бъдат обединени по задоволителен за всички начин в един общ списък. Първо са обединени списъците с подаръци за двете момчета - те ще получат общи подаръци (тъкмо затова обектът B, който представя следващата фаза от процеса на избиране на подаръци, има една точка по-малко). При следващата стъпка (на която съответства обектът C), списъкът на бащата е обединен с този на момчетата (оказва се, че те и тримата са искали футболна топка), но е добавен и нов списък с полезни неща, които никой не е поискал (разбира се, това е дело на майката). При следващата стъпка (зададена чрез обекта D) списъците вече са само два, тъй като майката е включила списъка с полезните подаръци и списъка на дъщеря си към изброяването на своите желания за Коледа. Накрая, списъците са сортирани (чрез морфизма, свързващ обектите D и E).

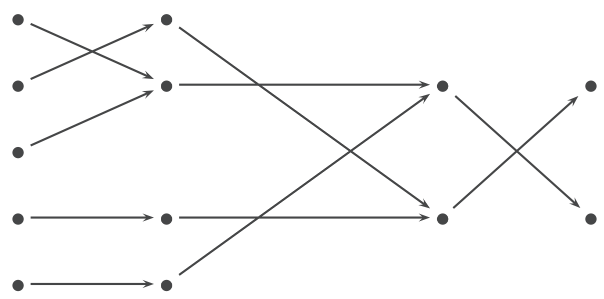
$$\mathrm{A} \xrightarrow{f_{AB}} \mathrm{B} \xrightarrow{f_{BC}} \mathrm{C} \xrightarrow{f_{CD}} \mathrm{D} \xrightarrow{f_{DE}} \mathrm{E}$$



Фигура 6. Пример: избор на подаръци за Коледа (I)

Каква е ролята на асоциативността на съчетанието в този случай? Очевидно, тя ни позволява винаги да заместваме две последователни трансформации на набора от списъци с тяхното съчетание, тъй като гарантира, че по този начин не оказваме никакво влияние върху крайния изход на процеса. Ето защо, в случай че решим да разглеждаме прехода от фаза B до фаза D като една единствена процедура, ще получим опростена диаграма:

$$\mathrm{A} \xrightarrow{f_{AB}} \mathrm{B} \xrightarrow{f_{CD} \circ f_{BC}} \mathrm{D} \xrightarrow{f_{DE}} \mathrm{E}$$



Фигура 7. Пример: избор на подаръци за Коледа (II)

От друга страна, ако решим да разглеждаме прехода от C до E като една единствена процедура, то ще получим нова диаграма (вж. фигура 8). Сравнявайки я с предишната фигура, виждаме че и в двата случая на едни и същи елементи на B се съотнасят едни и същи елементи на E. Тъкмо в това е смисълът на изискването за асоциативност: начинът, по който съчетаваме междинните преходи не оказва влияние върху отношението между началната и крайната точка на разглеждания процес.

Преди да продължим нататък, ще докажем две елементарни теореми, илюстриращи свойствата на съчетаването. По повод на това бих искал да направя едно уточнение по повод на това, което тук ще разбираме под „доказателство“. В началото доказателствата ще имат по-формален характер - ще посочваме всяка стъпка и ще я мотивираме чрез съответните аксиоми, иначе казано, ще се придържаме към относително висок стандарт за строгост. Впоследствие тази строгост ще бъде изоставена и доказателствата ще станат много по-лаконични - понякога свеждащи се до верижно равенство или дори една-единствена комутативна диаграма, показваща изпълнеността на определено съотношение. Причината за това е, че доказателството не е заместител на интуицията, а по-скоро инструмент за нейното изграждане - доказвайки теорема след теорема, постепенно ще се научим да „виждаме“ съответните