Павел Флоренски

ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЕ, ТВОРЧЕСТВО

София, 2013

Преводът е направен по изданието:
П. А. Флоренский
Анализ пространственности и времени
в художественно-изобразительных произведениях
Библиотека журнала „Путь“, 1993

ISBN 978-954-321-898-1

ПАВЕЛ ФЛОРЕНСКИ

ПРОСТРАНСТВО
ВРЕМЕ
ТВОРЧЕСТВО

Превод от руски
Ивайло Вътев

ИЗТОК ЗАПАД

Съдържание

АНАЛИЗ НА ПРОСТРАНСТВЕНОСТТА И ВРЕМЕТО В ХУДОЖЕСТВЕНИТЕ ИЗОБРАЗИТЕЛНИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

I

1924.II.5

Действителността, все едно дали това ще бъде природата, техниката или изкуството, се разчленява естествено на отделни, относително затворени в себе си единства. Тези единства са безкрайно изпълнени със съдържание, разчленяването на действителността при тях не може да бъде наричано рационално познание, ако под последното се разбира конструкция от прости понятия на разума. Това опростяване на действителността се достига по съвсем различен път, а именно когато се опитваме да си представим мисления модел на действителността, цялата накуп, от някои прости, и главното – винаги и навсякъде едни и същи мисловни образувания. Пространството и реалността, или вместо нея – по-нататъшното разлагане, при което реалността се изгражда от неща* и среда, такива са тези образувания на мисълта.

* Руската дума „вещь“ може да се преведе също като вещ и предмет. Тук и по-нататък се има предвид по-общото понятие „нещо“, тъй като под „вещь“ Флоренски разбира не само материални неща. – Б.пр.

В действителността няма нито пространство, нито реалност – следователно няма също неща и среда. Всички тези образувания са само спомагателни похвати на мисленето, затова и те, разбира се, са длъжни да бъдат неопределено пластични, за да предоставят възможност на мисълта всеки път достатъчно фино да се приспособява към тази част от действителността, която в дадения случай представлява предмет на особено внимание. Иначе казано, основните спомагателни похвати на мисленето – пространството, нещата и средата, имат задачата да ни представят действителността, в същността си построена от неизменен и еднороден материал, подвижна и разнообразна; при все това тази задача е и винаги ще бъде само декларация – в момента, когато тя на практика се осъществи, би настъпила смъртта на познанието, което от този момент би станало съвсем условно, при това съзнателно условно разместване на мисловни построения, удовлетворяващи се със собствената си дейност, вътре в себе си, без изобщо да имат отношение към действителността. Това е и което в лошия смисъл трябва да бъде наречено схоластика, такива именно са различните производни на кантианството. Еднородността и неизменността на тези образувания на мисълта трябва да бъде утвърждавана само относително, като бавна и малка изменчивост, по сравнение с времето и областта на интересуващата ни действителност. Изразявайки се математически, умствените редици, с помощта на които изобразяваме действителността, т.е. нейния вътрешен закон, винаги си прилича̀т само *в* пределите на един или друг кръг на подобие и следователно отвъд неговите предели се различават. И *извън* този кръг е възможно да бъде изобразен чрез редици същият този закон на действителността, но това изображение вече не може да бъде тъждествено с първото, въпреки че се доближава до него, като представлява, както сее казва, негово аналитично продължение.

Така и мисловните образувания – пространството, нещата и средата, както и да бихме ги били изграждали, са годни в един или друг кръг на подобие и не са годни *извън* него, ако искаме да бъдем верни на действителния опит, а не да се самозатваряме в училищни построения. Но те, мисловните образувания, могат да бъдат аналитически продължавани и изводими и *извън* пределите на този кръг, все по-далече и по-далече, посредством доближаващи се до тях, но все пак различни мисловни образувания. Функциите в теорията на комплексното изменяемо се изобразяват именно такива, закърпени помежду си парчета, и тази неиздържаност на едно и също изображение не е порок, а сила на метода, равняващ се не спрямо самия себе си, а според известна математическа предметност. Точно по този начин мисловният модел на действителността в живото мисленевинаги е закърпван и продължава да бъде кърпен от отделни парчета, аналитически продължаващи едно друго, които обаче далеч не са тъждествени помежду си. Всяко различно мислене непременно е схоластично и се занимава със себе си, а не с действителността.

II

Преди сто години Н. И. Лобачевски изказа категорично антикантовска и за времето си оставаща само смел афоризъм мисъл, а именно: различните явления във физическия свят протичат в различни пространства и следователно се подчиняват на съответните закони на тези пространства. Клифърд, Поанкаре, Айнщайн, Вейл, Едингтън[1] разкриват тази мисъл и я изразяват още по-разчленено по отношение на механичните и електромагнитните процеси. Тук вече става напълно ясна зависимостта на свойствата на пространството от нещата и средата, които се съдържат в това пространство, т.е. от силовото поле, или обратно – зависимостта на свойствата на силовото поле от свойствата на съответното пространство. Може да се каже, че самите неща не са нещо друго освен „гънки“ или „бръчки“ на пространството, места на особеното му изкривяване; нещата или елементите на нещата – електроните, могат да бъдат тълкувани като прости отверстия в пространството – извори и устия на световната среда; накрая може да се говори за свойствата на пространството, предимно за кривината му, като за производни на силовото поле и тогава да се съзре в нещата причината за изкривяването на това пространство.

Тези и останалите подобни рационални разлагания на действителността като модел, разбира се, никак не си приличат помежду си. Но тяхното логическо равноправие и прагматична равноценност са само следствие от един основен факт, който посочихме по-рано. Този факт е *спомагателността* на мисловните построения, на чиито взаимоотношения се дава някакъв модел на действителност, всеки от които сам по себе си не значи все още нищо по отношение на действителността. Свойствата на действителността при рационално познание трябва да бъдат поместени *някъде* в модел, т.е. в пространството, нещата или в средата. Но *къде* именно – не се определя по необходимост от самия опит и зависи от *стила* на строежа на мисленето, а не от строежа на опита. Пространството, вещите или средата – всяко от тези мисловни образувания може да бъде прието за първо и да служи като отправна точка; но което и от тях да бъде прието за първо и отправна точка, непременно по-нататък или явно, или прикрито ще се включат и другите мисловни образувания – при построяването на модел на действителността всяко от тях, взето поотделно, е безплодно.

III

Геометрията се определя от силовото поле, както и силовото поле – от геометрията. Цялата работа е в това, че геометричните построения и доказателства непременно се опират на този или онзи конкретен опит, било в настоящето, когато например измерваме с жезъл, верига или светлинен лъч, било в миналото, когато например при теоретичните си разсъждения си представяме обобщените образи на минали опити и при това понякога си мислим, че имаме опит с „чиста“ интуиция само затова че спомените ни от предишните опити са бледи.

Можем да си говорим каквото си искаме за геометричните образи, но щом си ги представяме действително, затова и можем действително да ги употребяваме при мисленето само съотнесени спрямо едни или други опити. Затова и тяхната надеждност е изцяло свързана с тази на използвания опит. Междувременно частният опит или съвкупността от частни опити зависят от опитния *фон*, върху който той, опитът, или тя, съвкупността, се открояват, следователно не зависят от техните свойства. И така, за да бъде понятието за *права* употребяемо в мисленето, ние непременно да се свържем в това отношение, т.е. по отношение на правата, с някакъв род опитно наблюдаеми процеси и да си кажем, че имаме работа с права – това означава да използваме избрания род процеси в наличния опит или във въображаемия опит. От нас зависи на какъв именно род процеси искаме да се опрем, но правейки избор, ние сме принудени, поне в рамките на известно време и известна област на действителността, т.е. в някакъв кръг на подобие, да се придържаме към своя избор и да му оставаме верни. А това означава, че сме се обрекли да бъдем увличани от всички течения на действителността, които отнасят избраната от нас опора на мисленето.

Образно казано, от *нас* зависи на кой именно кораб ще се качим; но на един, какъвто и да е той, все пак сме длъжни да се качим, защото не можем непосредствено да ходим по морето – това би съответствало на мислене без опитни данни. Но в момента, в който сме си избрали кораб, нашият произвол свършва и сме принудени да плаваме именно на него дотогава, докато не срещнем друг кораб, на който да се прехвърлим, за да можем аналитично, т.е. взаимосвързано, а не напосоки, да продължим своя път, свързвайки плътно двете интуиции, а не да прескачаме чрез скок на чистото мислене. Естествено е ясно, че докато сме на кораба, ние споделяме и неговите превратности – ветровете, бурите и теченията, на които той е подложен по време на плаването си.

IV

Можем да определим *правата* различно – било да я свързваме със светлинния лъч, било да се опираме на твърдия жезъл, било да изхождаме от опънатия конец, било да си представяме правата като инерционна траектория на някаква маса, било да искаме да видим правата в най-краткия път и т.н. Но всеки път ние неизбежно внасяме в понятието за права едно или друго от свойствата на взетото като основа физическо явление и чрез това свойство свързваме употребата на своето понятие за права с новите фактори, които вече не сме в състояние да отделим от нашия образ на правата. Затова и правата, нашата права, вече получава допълнителни свойства, с които ние непременно трябва да се съобразяваме под заплахата в противен случай да направим своето понятие за права явно противоречащо на опита.

По този начин, ако правата се мисли като светлинен лъч, то както и да въздейства на този лъч обкръжаващата среда, например при рефракцията, или нещата – например чрез притегляне на лъча от гравитационни маси, ние все пак се задължаваме да наричаме нашия лъч права и особеностите на неговото движение да отнасяме вече към свойствата на пространството – ние *нямаме* критерий, по който бихме могли да съдим за кривината на този лъч, нямаме по-прав еталон от самия лъч, тъй като той е еталон на всичко право. Следователно, като продължаваме да настояваме на неговата праволинейност, ние сме принудени да признаем обкръжаващото пространство – с такова устройство, че правите в него имат гореуказаните особености. Невъзможно е да се изгради геометрия, без да бъде призната някаква конституция; но тя, макар и да е установена свободно, по-нататък трябва да бъде поддържана поне до появата на нов законодателен акт, съзнателно отправящ геометричното мислене по нов път. В никакъв случай подмяната на основите не трябва да се извършва несъзнателно или негласно – иначе вместо път ще имаме блуждаене, вместо мислене – хаос.

Ако правата се определя от жезъл, а този жезъл при понижаване на температурата се измята на една страна, а при повишаване – на друга, то, премествайки жезъла в пространство с променлива температура и гледайки на жезъла с очите на геометър, т.е. без да имаме никакви освен геометрични понятия, напълно абстрахирайки се от чуждото на геометрията понятие за температура, ние ще продължаваме да приемаме своя жезъл за прав, но от особеностите на неговото поведение на различните места от пространството ще направим съответните геометрични изводи относно строежа на самото пространство. Ако поставим въпроса от гледище на физиката, а не чисто геометрично, можем, разбира се, да разсъждаваме различно – може във всичко случващо се да виним различно нагрятата среда; можем да припишем това на механични сили, т.е. да постулираме известни силови центрове; накрая можем да видим източника на особеностите на жезъла в строежа на пространството. Но при първите два начина на трактуване ни е необходимо да имаме еталон за праволинейността на жезъла и да бъдем уверени в неговата неизменност. Пита се за какво ни е трябвало да определяме правата с помощта на твърдо тяло, щом като това определение е неустойчиво, а разполагаме с еталон, който наистина е неизменен, и защо от самото начало не сме взели именно неизменния еталон? Та нали той, последният, далеч не е доказуем повече, отколкото първият. А обстоятелството, че първият еталон е показал някои особености, не е ли свидетелство за неговата ценност, а не за неговата негодност? Ако бяхме уверени в него от самото начало, то особеностите на неговото поведение в някакво пространство разкриват свойствата на самото това пространство. Нашият еталон не иска угоднически да ни показва гладкостта на цялото пространство – това не е основание да отхвърлим неговата вярна служба, ако от самото начало сме го сметнали за заслужаващ доверие. В противен случай от същото това начало той е трябвало да бъде отхвърлен.

V

Подобни разсъждения трябва да бъдат повторени и при всички останали тълкувания на правата, а и изобщо спрямо всички геометрични обекти. Но особено силно това се отнася спрямо определението за правата като най-кратко разстояние.

За мярка* на пространственото разстояние служи работата, извършвана за преодоляването на това разстояние. Ако действителността не ни поставяше никакви препятствия при преодоляването на разстоянията и можехме да се преместваме без каквото и да било поне вътрешно усилие от място на място, то у нас не би възникнала и мисълта за разстоянието и бихме осъзнавали отделните образи на действителността слято. Естествено, тогава нямаше да има и мярка за разстояние. Извършената за преодоляване на пространството работа може да бъде различна и затова – различно измерима. Това може да бъде механична работа, един или друг физически процес или накрая някакъв вид

* В полето на ръкописа стои датата 1924.11.10.

психо-физическа работа. Нея можем да измерваме в едни случаи с физически прибори, в други – чрез непосредственото усещане за изразходваните усилия, т.е. умората. Не съществува необходимост пространството да бъде преодоляно непременно чрез вървеж със собствените нозе или в малки размери чрез придвижване на ръката, главата и т.н.; въпреки това, разбира се, бива осъзнавано наистина именно това пространство, което сме изминали пеша. Възможни са и други начини на изразходване на усилия за преодоляване на пространството – например усилията на вниманието при проблясващите изгледи в прозореца на вагона, наполовина осъзнатото усвояване на ритъма на тракането и люлеенето при същите условия, дори изразходването за борба с овладяващото чувство за опасност и т.н., и т.н. Но все някакво изразходване на усилия е необходимо условие, без което разстоянието се оказва неоценено, а пространството – неосъзнато. Това условие може да бъде осъществено с икономическо усилие – чрез заплащането на билета или пощенската пратка; но и тук съзнанието за пространство не идва даром. Дори при мечтата, когато фантазията блуждае където ѝ хрумне, ние полагаме някакво усилие да си представим, макар и много повърхностно, някакви пътища за нашите полети, за това също харчим усилия, а мечтанията също уморяват. Но на нищожността на потрябвалата тук работа съответства едно смътно и неясно осъзнаване на преодолените пространства – в мечтите почти не става дума за разстояния именно затова защото почти не е извършена работа за тяхното преодоляване, – тогава в един или друг смисъл далечното изглежда като че само се приближава и почти се слива с нашето местопребиваване. Следователно, ако правата се определя като най-краткото разстояние, то това определение само по себе си няма никакъв смисъл, доколкото не е установено допълнително как именно трябва да се измерва разстоянието. А когато това допълнително определение е направено, ние сме принудени логически да се придържаме към установения похват и да не го подменяме с какъвто и да било друг, уж по-правилен (за това е трябвало да се помисли от самото начало); нещо повече, да не се проверява праволинейността на линиите, които са оценени от метода като най-кратки – да не се проверява тази праволинейност с алтернативни еталони като жезъла, лъча и др. Та нали ако незаконно започнем да въвеждаме – наред с чисто геометричното определение – предположението за каквито и да било физически или психически фактори, уж пречещи на точността на геометрията, с това нарушаваме самата същност на геометрията като такава и говорим за физика, психо-физиология и др., които сами не могат да бъдат построени *без* геометрията. А, от друга страна, ако възникне съмнение дали в дадения случай нашият обичаен начин за измерване на разстоянията е употребен уместно поради изкривяващото въздействие на особените условия на опита, то защо ще отричаме изкривяващото действие на същите тези условия и спрямо всички останали възможни начини за оценка на праволинейността на дадена линия. И при това, бидейки различни, еталоните за праволинейност, разбира се, несъгласувано помежду им ще се изкривяват в едни и същи условия; нали тъкмо поради тази несъгласуваност ние ще получим усъмняващи данни. Но защо пък неизвестното изкривяване на новия еталон да се приема за допустимо и търпимо, като поради изкривяване се захвърля на боклука старият еталон и по този начин резултатите от едната и другата проверка се правят несъвместими помежду им? Очевидно за геометрията няма друг изход, освен да се спре с доверие на някой от методите за проверка на своите образи, като по-нататък не се разделя с него и не се вслушва в нашепванията на другите методи, чиято безупречност сама остава недоказуема. Да поясним казаното с прост пример.

VII

Да си представим, че живеем в среда, изпъстрена с потоци, и нямаме твърда почва под краката си. Така би било, ако бяхме мушици в атмосфера, където царят непрекъснати ветрове и вихри. Така би било и ако бяхме риби в широка и достатъчно бърза река. За простота да предположим по-нататък, че нямаме зрение или че нашата среда е непрозрачна или неосветена. Ако тогава бихме поискали да построим геометрия, то като основа на определението за правата като най-кратко разстояние бихме поставили работата – измерима било чрез физически прибори, било чрез чувството за умора, – която е трябвало да извършим, за да преплуваме от едно място до друго. Този път, по който нашата умора би била най-малка, щеше и да бъде признат от нас за права. Това нямаше да е правата от Евклидовата геометрия. Но наред с това определение би могло да възникне и друго, а именно – определението на правата като пътя на най-бързото преместване от едното място до друго. Няма никакви основания напразно да се очаква, че пътищата по тези две определения винаги ще съвпадат, особено ако теченията и вихрите на нашата среда не са замлъкнали. Такова несъвпадение на пътищата по едното и другото определение навярно би подбудило геометъра, неуверен в своята конституция, да привлече към проверката нови определения за правата и нови начини за проверка на праволинейността. Но всички такива начини сами биха били подложени на изкривяващото въздействие на средата – движещото се по инерция малко тяло би се отклонявало встрани от праволинейния, по Евклид, път, опънатият конец или веригата биха провисвали под напора на течението, жезълът би се огъвал, светлинният лъч също би се движил не по Евклидова права вследствие на рефракцията поради различната плътност на струите в течната среда и вследствие движението на самата тази среда. Всички пътища, първоначално определени като прави, биха се деформирали и при това биха различно се разминавали помежду си. Пита се къде е именно правата и коя от тези предполагаеми прави да ни ръководи при проверката на праволинейността, ако случайно се решим да изменим на формално установеното определение за права, възприето от един, непременно *единствен* от гореизброените начини на определение и проверка. Но тогава – настоявайки на праволинейността на нашата линия, правата, съгласно приетото определение – ще бъдем длъжни да признаем и редица особени свойства на правата, които не отговарят на описаното от Евклид. Съвкупността от такива свойства освен всичко друго ще бъде различна в зависимост от определението коя именно от линиите между две точки сме се съгласили да наречем права.

Някой би казал, че все пак има *истинска* права, т.е. както в учебника по геометрия. Работата е там, че, така поставено, възражението е лишено от смисъл. Правата не е предмет, а е наше понятие за действителността. И ако не можем да разкрием конкретното съдържание на това понятие, то обемът на неговата употреба е равен на нула и такова понятие няма. Между другото, както видяхме във взетия пример, Евклидовата права не си намира нито място, нито условия за употреба. Тази действителност, като беше показано, не дава поводи за понятието на Евклидовата права, както не дава и опити, правещи такова понятие съдържателно. Иначе казано, там *няма* Евклидова права.

Не геометърът, а вече физикът, при това стоящ на твърда почва, може, разбира се, да раздели не-Евклидовата геометрия на теория на пространството по Евклид и на теория на хидродинамичното поле; но за геометъра от онази течаща среда такова разделение би изглеждало крайно изкуствено и той на свой ред би разделил Евклидовата геометрия на своя колега на своя собствена, не-Евклидова геометрия и на предполагаемо силово поле; също може би течението като някаква световна течност ще бъде обяснено достатъчно с това силово поле, защо приетата на земята геометрия изглежда Евклидова, въпреки че на практика не е такава. А по-просто казано, собствена геометрия с предполагаемо всемирно еднообразие на физиката и психо-физиологията; както и обратно, ако се отправяме от нещата, навсякъде възникват собствена физика и психо-физиология, затова пък с предполагаемо всемирно еднообразие на геометрията.[2]

VIII

Свойствата на действителността се разпределят между пространството и нещата. Те могат да бъдат размествани в една или друга степен от пространството към нещата или обратно – от нещата към пространството. Но както и да ги бихме размествали, трябва *някъде* те да бъдат признати, тъй като иначе няма да бъде построена картина на действителността. Колкото повече се възлага на пространството, колкото се мисли то за по-организирано, затова и по-своеобразно и индивидуално, толкова повече избледняват нещата, приближавайки се към общи типове. Наред с това известен отрязък от действителността получава стремеж да се отдели от обкръжаващата действителност и да се затвори в себе си. Работата е ясна – тези уплътнено идеализирани и до голяма степен самозатворени пространства вече трудно се обединяват помежду си, всяко представлява свой малък свят. Иначе казано, опирайки се при отношението към действителността предимно на пространството и възлагайки *му* тежестта на възпроизвеждане на действителността, съзнанието се движи в посока на художественото световъзприемане. Предел на подобен род възпроизвеждане на действителността би било почти пълното отъждествяване между действителността и пространството, където доста пластичните неща биха се подчинили на пространството до загуба на собствената си форма. Такава действителност би ни изглеждала като изградена от светоносен газ, би представлявала облаци светлина, покорни на всеки полъх на пространството. В областта на изкуството например близък до този предел е Ел Греко.

Обратно, прехвърляйки натоварването върху нещата, ние уплътняваме тяхната индивидуалност и едновременно с това правим пространството по-бедно. Нещата, всяко поотделно, се стремят към самозатвореност. Връзките между тях отслабват, а заедно с това бледнее и пространството, което губи отличителната си структура, вътрешна свързаност и цялостност. Доколкото силите и организацията на действителността се приписват на нещата, всяко поотделно, обединяващото ги пространство пустее и от конкретната пълнота се стреми към меон*. С отслабена вътрешна свързаност и цялостност, именно поради това то става отделено от външното пространство с все по-ненадеждна граница. Мембраната, чрез която е обособено единното в себе си пространство, изтънява, за да даде място на лесната дифузия с околното пространство. От всичко това пространството има стремеж да стане отрязък от друго, по-голямо пространство, а нещата, макар и обособени всяко в себе си, се оказват случайна купчинка, чиято общност не е мотивирана с нищо. Такова възприемане на света е характерно за позитивизма в науката и натурализма в изкуството. Евклидовото пространство и линейната перспектива тук се приемат като стъпала към най-малко съдържателното и най-малко структурно разбиране за пространството. Въпреки всичко и такова разбиране оставя все още някакви следи от пространствена организация. Пределно би било пълното пренасяне на всички свойства на действителността единстве-

---

* Меон (гр. μὴὄν) – несъществуващото, небитието. – Б.к.

но и само върху нещата и лишаване на пространството от каквато и да било структура. Такова, изметено до блясък пространство би било наистина метафизично пространство (στέρησις – лишение, от глагола στερέω – лишавам, измитам), т.е. чисто небитие, τό μή όν.

Пространството, което би било действително строго всеобщо и действително лишено от своеобразие на организацията си, би се оказало чисто *нищо*; без да носи в себе си никаква обяснителна функция, би било безполезно в модела на действителността.

И така, изграждането на картината на действителността изисква нито пространството, нито нещата да бъдат доведени до пределно натоварване. Но мярката на това натоварване всеки път е обусловена от характера и размерите на разглежданата действителност, от стила на мислене и поставените от задачите дейности. Като цяло може да се каже, че е изгодно да се възложи върху пространството всичко това, което в пределите на разглежданата действителност може да се смята за относително устойчиво и всеобщо. Но и това, и останалото трябва да бъде взето именно по отношение на разглежданата действителност, а не въобще спрямо лежащите извън нашето настоящо разглеждане опити.

IX

Пространството може да бъде обяснено със силовото поле на нещата, както и нещата – със строежа на пространството. Строежът на пространството е неговата *кривина*, а силовото поле на нещата е съвкупността на силите на дадена област, определящи своеобразието на настоящия ни опит. При Евклидовото пространство мярката на кривината е нула, но това не значи, че спрямо него е неприложимо понятието кривина, нулата само определя характера на неговата кривина. Преди да се говори изобщо за пространството, нека се вгледаме в особеностите на Евклидовото – особености, които са ни дотолкова привични, че ги приемаме като нещо разбиращо се от само себе си, въпреки че на практика то не е такова.

И така*, Евклидовото пространство се характеризира главно със следните признаци – то е еднородно, изотропно, непрекъснато, свързано, безкрайно и безгранично. Това далеч не са всички характерни признаци на Евклидовото пространство и под тази съвкупност от признаци може да се поставят различни Евклидови пространства. Но за първоначален подход това е достатъчно.

Да се спрем на първо място на еднородността на Евклидовото пространство като най-враждебна към целостта и самозатвореността на художествените произведения и живите органични форми. Признакът на еднородността на пространството, общо взето, се състои от неиндивидуализираността на отделните места в пространството – всяко от тях е същото като другите, те могат да бъдат различими не сами по себе си, а само съотнесени помежду си. Този признак на еднородност може да бъде подразделен на по-частни, основно на два – на изогенността на пространството и на неговата хомогенност. Аксиомата на изогенността, която е основна у Л. Бертран** от Женева, гласи: пространството е еднородно във всички свои части, тук то е същото, каквото там[3]. Бертран смята това свойство за най-просто и го изразява така: „Частта от пространството, която би заело едно тяло на едно място, не се отличава от тази, която би заело на друго, към което още ще добавим, че пространството около едно тяло е едно и също с пространството около същото тяло, поставено на друго място." Тук непосредствено се прибавя друго свойство, а именно възможността пространството да се раздели на две такива части, че „нищо да не може да се каже за едната, без да може да се каже за другата". Следователно, границата на деление се отнася еднакво към двете части на пространството. Тази граница е плоскост, а от плоскостта може да се направи преход към правата.

Хомогенността на пространството е отбелязана основно от Делбьоф***, а също Ръсел**** и др. Това и свойството на простран-

---

* На полето е отбелязана датата 1924.II.12.

** L. Bertrand. Développement nouveau de la partie élémenlaire des Mathematiquesprise prise dans toute son étendue. Genève, <t. 1–2>, 1778.

*** Delboeuf <Joseph>. Sur les fondéments de Géométrie. Delboeuf. L'ancienne et les nouvelles Géométries (Revue philosophique, T. 36, 37. 1893–1894).

**** Roussel. Essai sur les fondéments de Géométrie.

ството или пространствените фигури да съхраняват всички вътрешни съотношения при промяна на размерите, иначе казано – пространството на макрокосмоса, е същото като пространството на микрокосмоса. Увеличаването или умаляването на фигурата, макар да бъде направено безпределно, не нарушава нейните форми. Иначе казано, пространството се характеризира от известния постулат на Уолис[4]: „За всяка фигура съществува подобна на нея – произволна по размер", установен през XVII век и равносилен според Уолис на петия постулат на Евклид. Към аксиомата за хомогенността на пространството се прибавя по-нататък определението на правата по Евклид: „Права линия е такава, която е еднакво разположена по отношение на точките върху нея", или равносилната на Делбьоф: „Правата линия е линия еднородна, т.е. такава, чиито произволно избрани части са подобни помежду си или се различават само по дължина."

И така, отрязъкът от пространството на което и да е място (изогенност) и с какъвто и да е размер (хомогенност) сам по себе си няма никакви отличителни признаци, независимо как ще бъде взет. Пространството на Евклид е инвариантно към геометричните обекти в него и следователно няма никакви причини, служещи за опори, удържащи физическите процеси на точно определени места. Преместването в пространството на дадена физическа система, доколкото извън нея няма никаква друга система, остава незабелязано и не може да бъде взето предвид. Такава е еднородността на Евклидовото пространство. Ясно е – нито в прякото възприемане не действителността, нито в изкуството, опиращо се на това възприемане, не можем да установим тази еднородност и всяко място от пространството има в нашия опит своеобразни особености, правещи това място качествено различно в сравнение с всички останали.

Щом е така, не се налага да се говори и за по-частните случаи на еднородност, т.е. за Евклидовите плоскости и Евклидовите прави. Ние можем чрез някои сложни похвати да се заставим да разбираме възприеманото от нас пространство като съдържащо Евклидови равнини и линии, но това разбиране се заплаща скъпо и изисква много сложни мисловни построения, които никой няма да пожелае да прави, освен ако не осъзнава ясно какво се иска от него. Обичайното доверчиво приемане на Евклидовото тълкуване, но без собствени физически и психо-физически корективи, свидетелства много повече за безгрижието на приемащите, отколкото за действително изграждане на опит.

X

Близко, но не съвсем тъждествено с еднородността, е свойството на Евклидовото пространство, наречено изотропност. Понякога се случва то да не се отличава достатъчно от еднородността, но това е също толкова невярно, колкото ако някой от съотносителността и аналогичността на свойствата на ъглите и отсечките би изличил границата между едните и другите.

Изотропността на пространството при ротацията на лъча около точка говори същото, което еднородността за отдалечаването от нея. Това означава, че всички прави, изхождащи от точката, са равноправни помежду си, нямат никакво индивидуализиращо ги своеобразие, а следователно са неразличими сами по себе си, взети отделно. Няма никакъв признак, установен спрямо едно направление в Евклидовото пространство, който да не бъде едновременно признак на всяко друго направление. Каквото и да било завъртане на фигурата в пространството не променя нищо в нейните вътрешни съотношения – Евклидовото пространство е инвариантно към ротацията в него, както е инвариантно и към транслацията.

Всеки действителен опит ни показва обратното и непосредственото съзнание напълно ясно отбелязва в себе си качествената особеност на всяко от направленията. Кристалната среда дава изразителен образ на неизотропност, въпреки че е еднородна навсякъде – с осите в кристалната решетка се указват направленията на най-голямо изразяване на едно или друго свойство на средата. Всяко действително възприятие, както видяхме порано, дава на всяко от основните направления някаква абсолютна качественост, която никак не може да бъде объркана с друга, нищо не отъждествява вертикалата и хоризонталата, въпреки че в Евклидовото пространство е напълно безразлично кое ще бъде прието за вертикала и кое – за хоризонтала. Да бъде изтълкуван непосредственият опит в този изотропен смисъл е възможно на още по-висока цена, отколкото при еднородността. Разбира се, в действителния опит може да се следва Евклид, но само с придържане към правилото: Fiat justitia, id est geometria Euclidiana, pereat mundus – pereat experimentum.*

XIV[5]

Както беше казано вече, гореизброените и други свойства на пространството напълно или в значителна степен могат да бъдат сведени до една характеристика, а именно до понятието за кривина, при това се твърди, че мярката на кривината е равна на нула за Евклидовото пространство. Може би логически не би се удало да се доведат характеристиките на Евклидовото пространство към нулевата мярка за кривина, както не би се удало изобщо съвкупната характеристика на всяко друго пространство формално логически да бъде сведена до съответната мярка на неговата кривина. Във всеки случай обаче мярката за кривина характеризира много дълбоко пространството и е призована да бъде ако не единствен, то все пак главен корен на цялостната организация на дадено пространство.

Първоначалното понятие за кривина възниква по отношение на плоските линии. Кривината в дадена точка се оценява във връзка с това колко бързо, или, ако предпочитате, доколко стръмно се отклонява в тази точка линията от правата, като за мярка за изкривяване се взема такава линия, чиято кривина е еднаква навсякъде, т.е. окръжността. Ние подбираме такава окръжност, която би съвпаднала с дадената крива в дадена точка, което се изразява чрез общото им преминаване през три безкрайно близки точки. Трябва да си представим по-нагледно това измерване на кривината като физическо измерване – разполагаме с набор от фиксирани окръжности, при това поредният номер в тази скала е толкова по-висок, колкото по-силно огъната е дъгата на съответната му окръжност. Ако сега наставим тези кръгове към допирателната към измерваната линия, то

* Нека правото (сиреч Евклидовата геометрия) възтържествува, пък ако ще светът (сиреч опитът) да загине.
Перифраза на базисната в римското право сентенция: „Нека правото (справедливостта) възтържествува, пък ако ще светът да загине. – Б.к.

едни от тях ще се окажат от едната ѝ страна, други – от другата, т.е. едни са огънати по-плавно от тази част на нашата линия, други – по-силно. Някакъв промеждутъчен номер съответства на окръжност, която не е нито повече, нито по-малко огъната от измерваната линия, и тази окръжност върви известно, макар и малко време, заедно с нашата линия, без да отстъпва от нея нито в едната, нито в другата посока. Тази окръжност, или степента на нейната изкривеност, именно измерва кривината на даденото място от нашата линия.

Кривината на окръжността пък се характеризира от нейния радиус R или още по-добре от величината $\boldsymbol{K_1}$, където $\boldsymbol{K_1}$ е реципрочна на радиуса.

$$K_1 = 1/R$$

Кривината $\boldsymbol{K_1}$ на линията се променя от точка до точка и в някои случаи може да стане нулева, отрицателна – когато линията се огъва в обратна посока, и безкрайно голяма – когато линията прави остър завой[6].

Аналогично понятие може да се установи и по отношение на двуизмерните геометрични образи, т.е. повърхнините. Но тази аналогичност не може да бъде опростена, като се замени измерващата окръжност със същата такава сфера и се приеме като мярка за кривина величината, обратна на нейния радиус.

На практика, бидейки двуизмерно многообразие, повърхнината се изкривява по едната си координатна ос без каквато и да било зависимост от изкривяването си в перпендикулярно направление; примерът с листа хартия, който може да бъде огънат по един или друг начин, като при това остава неогънат в перпендикулярно направление, пояснява това свойство на повърхностите. И така, величината, характеризираща кривината на повърхнината, трябва да взема под внимание степента на изкривеност на повърхнината спрямо две, взаимно перпендикулярни направления, т.е. два радиуса на кривина, както казват – главните радиуси, единият от които, най-големият, е $\boldsymbol{R_1}$, а другият, най-малкият – $\boldsymbol{R_2}$. Така възниква понятието за Гаусовата кривина[7] на повърхнината в дадена точка $\boldsymbol{K_2}$, при което

$$K_2 = \frac{1}{R_1 \cdot R_2}$$

Изобщо казано, мярката на кривината $\boldsymbol{K_2}$, се променя от точка в точка и може да приема различни стойности между $-\infty$ и $+\infty$. Геометричният смисъл на величината $\boldsymbol{K_2}$ като *единна* характеристика се установява от теоремата на Гаус за така наречения сферичен ексцес*. Нека вземем върху Евклидова равнина триъгълник ABC, със страни a, b, c. Сборът на неговите ъгли е равен на π, така че:

$$\alpha = 2q - \pi = 0$$

$$\text{където } 2q = \angle A + \angle B + \angle C$$

Да пренесем сега нашия триъгълник, предполагайки, че неговите страни са гъвкави, но не и разтегливи, върху разглежданата крива повърхнина и по възможност да огънем неговите страни така, че да не се отлепят от повърхнината. Тогава всяка една от тях ще мине по посока на най-краткото разстояние по повърхнината, или както се казва, по геодезичната линия. Такава линия съгласно определението за права като най-краткото разстояние, обитателите на тази повърхнина трябва да приемат за права или за най-правата права върху повърхнината и следователно да приемат целия триъгълник за праволинеен. Разбираемо е, че формата на триъгълника вече се е променила, променили са се и неговите ъгли, те вече не са **A**, **B** и **C**, а $\boldsymbol{A^1, B^1, C^1}$, а сборът на техните ъгли $2q^1$ вече не е π, а някаква друга величина. Затова $\boldsymbol{\alpha = 2q^1 - \pi}$, където $\boldsymbol{2q^1 = \angle A^1 + \angle B^1 + \angle C^1}$ вече не е равно на нула. Тази величина **α**, т.е. величината, с която сборът на ъглите на деформирания върху кривата повърхнина триъгълник се отклонява от сбора на ъглите на същия триъгълник в Евклидова плоскост, носи названието сферичен ексцес. Ясно е, че този ексцес има изкривяване на повърхнината и следователно сам характеризира тази изкривеност. По-нататък деформацията на триъгълника трябва да се отрази и върху големината на неговата площ. Ако си представим, че сме поставили триъгълника върху равнина, разделена на съвсем малки квадратчета и ги преброим, а след това

* Сферичен ексцес се нарича разликата между сумата от ъглите в сферичен триъгълник и числото π, което измерва в радиани сумата от ъглите в равнинен триъгълник. Получава стойности в интервала между 0 и 2π и обикновено се означава с „Е“. – Б.к.

извършим същото с триъгълник върху крива повърхнина, то броят на квадратчетата, които заемат триъгълниците, ще се окаже различен и тази разлика също така характеризира изкривяването на повърхнината. Следователно трябва да възникне мисълта да се свържат тези три величини – площта, сферичния ексцес и кривината. Това прави и теоремата на Гаус, съгласно която:

$$\int_{(S)} K_2 d\sigma_2 = 2q - \pi ,$$

където интегралът се разпростира върху цялата повърхнина на триъгълника $\boldsymbol{A^1B^1C^1}$, поставен върху крива повърхнина, а $\boldsymbol{d\sigma_2}$ е елемент от площта на този триъгълник. Смисълът на теоремата е в това, че сферичният ексцес се натрупва като цяло от всички елементи на повърхнината, но толкова повече, колкото по-голяма е кривината в този елемент. Иначе казано, ние сме длъжни да си представяме кривината на повърхнината по някаква формална аналогия с повърхнинната плътност и сумарното натрупване на това качество на повърхността се отразява като сферичен ексцес на триъгълника.

Теоремата на Гаус може да бъде разтълкувана физически, като използваме прахообразно или течно тяло. Ако някакво количество течност, мислена като несвиваема, се налее на тънък равен слой върху повърхността на плосък триъгълник, а след това същата течност се прелее на слой със същата дебелина върху деформиран триъгълник, то течността няма да достигне или пък ще бъде прекалено много. Тъкмо този излишък от течността, с положителен или отрицателен знак, отнесен към дебелината на слоя, ще се равнява на сферичния ексцес на триъгълника.

Да се върнем към формулата на Гаус. Съгласно методите на анализ на безкрайно малките тя може да бъде преписана във вида:

$$\overline{K}_2 \int d\sigma_2 = 2q_3 - \pi ,$$

където $\overline{K_2}$ е някаква стойност на кривината на нашата повърхнина вътре в триъгълника. Следователно:

$$\overline{K}_2 = \frac{2q_3 - \pi}{\int_{(S)} d\sigma_2}.$$

Тази средна стойност на кривината на триъгълника се характеризира като сферичен ексцес на деформирания триъгълник, отнесен към единица от неговата площ. Иначе казано, това е излишъкът течност при деформирането на триъгълника, отнесен към пълното ѝ количество, или по друг начин – относителната промяна на повърхностния обем на нашия триъгълник при неговото деформиране. Да си представим сега, че нашият триъгълник става все по-малък и по-малък. Тогава неговата площ ще започне безкрайно да намалява, но наред с това ще започне да намалява безкрайно и сферичният ексцес (освен ако разглежданата точка не е особена). Отношението на тези намаляващи причини ще се стреми към предел, предизвикващ относително изменение на повърхностния обем в дадена точка. Това е и истинската Гаусова кривина на повърхнината в дадена точка.

$$K_2 = \lim_{s=0} \overline{K}_2 = \lim_{s=0} \frac{2q-\pi}{\int\limits_{(S)} d\sigma_2} = \frac{d\alpha_2}{d\sigma_2}.$$

И така, когато обсъждаме кривата повърхнина от триизмерното Евклидово пространство, то пренасянето върху нея на плосък триъгълник тълкуваме като деформация и към понятието за кривина изхождаме от представата, че неговите страни са се изкривили. Но това е външна оценка на случващото се и при това, когато този външен свят се припознава като безусловно неизменен, това е високомерно обяснение, което би било дълбоко чуждо и навярно враждебно за обитателя на обсъждания триъгълник. Гаусовата кривина като величина $1/(\boldsymbol{R}_1 \,.\, \boldsymbol{R}_2)$ за него съществува само като формално аналитичен начин на изразяване, тъй като този жител не съзнава нищо *отвъд* повърхнината, върху която лежи триъгълникът, затова и не е способен да забележи изкривяването като такова. Вътрешната оценка на ставащото, достъпна за неговото пряко наблюдение, както и съответстващото изражение на кривината в дадена точка ще бъдат построени от него именно по гореуказания начин: кривината на повърхността е относително изменение на повърхнинния обем в дадена точка, изчислено на единица площ. Физически промяната на кривината от точка в точка би могла да се установи чрез опити с тънък слой несгъстяваща се течност.

XV

Триизмерното пространство също се характеризира с мярка за кривина във всяка точка, при това се прави бърз преход, далеч не обоснован геометрично, че триизмерното пространство може да бъде изкривено по същия начин като двуизмерното. Най-често обсъжданията на не-Евклидовите пространства се ограничават именно в двуизмерни области. Когато се подложи на обсъждане и триизмерното пространство, то неговата кривина се въвежда само формално аналитически, като някакъв израз на диференциални параметри, и няма нито геометрична прегледност, нито физическа доловимост. Остава неясно какво именно трябва да направи физикът, макар и в мисловен експеримент, за да може по един или друг начин да се изкаже за кривината на изучаваното от него пространство. Геометрично отвлечено, кривината на пространството трябва да се изразява чрез изкривяването на най-преките, т.е. най-кратки или геодезични линии. Но както беше разяснено по-горе, физикът, останал с всичките си инструменти и дори с нагледните си представи в пределите на този същия триизмерен свят; навярно подложен на същата деформация, на която и изследваната геодезична линия, изглежда няма метод да се убеди непосредствено в изкривяването на най-пряката линия. Понятието, което не достига при обсъждането на не-Евклидовите пространства, все пак може лесно да бъде построено, ако се обърнем към предишното. Това понятие е относителната промяна на обема на пространството.

Цялата работа е в това, че едно и също геометрично тяло при различна изкривеност на пространството ще има различна вместимост. Промяната на тази вместимост, отнесена към единица обем, ще измерва кривината на триизмерното пространство.

По-прецизно към разбирането за мярката на кривината можем да подходим така.

Да си представим* тетраедър, напълнен с несгъстяваща се течност. Нека ребрата на този тетраедър бъдат гъвкави, но не разтегливи и винаги да прилепват, т.е. да бъдат най-преки; страните

* В полето е отбелязана датата 1924.11.16.

на същия тетраедър трябва да си представим способни да се разтягат и свиват. Сборът на телесните (пространствените) ъгли на тетраедъра е равен на 4π, т.е. на четири прави ъгли на тялото. Сега да си представим, че нашият тетраедър е пренесен в не-Евклидово пространство. Тогава той ще се деформира – неговите ребра ще минат по геодезичните линии, страните му ще се превърнат в плоскости на това ново пространство. Следователно телесните ъгли ще се изменят и техният сбор вече няма да бъде вече 2π[8], затова ще се промени и обемът на тетраедъра. Следователно съдържащата се в него течност сега ще бъде било прекалено малко, било прекалено много; този излишък, разбиран в алгебричен смисъл, зависи от степента на деформация на тетраедъра, следователно от излишъка в сбора на ъглите на тялото и всички произлизащи оттук последици зависят от степента на изкривяване на даденото пространство, следователно относителното изменение на обема на тетраедъра характеризира кривината на пространството.

По такъв начин можем да изразим теорема, аналогична на теоремата на Гаус:

$$\int_V K_3 d\sigma_3 = 2p_3 - 4\pi.$$

Тук $\boldsymbol{d\sigma_3}$ е елемент от обема, $\boldsymbol{K_3}$ е кривината на триизмерното пространство, $\boldsymbol{2p_3}$ – сборът от ъглите на тялото на тетраедъра, а интегралът се разпространява върху целия обем на тетраедъра. Това означава – излишъкът на сбора на ъглите на тялото над 4π, който може да бъде наречен хиперсферичен ексцес, се натрупва в тетраедъра от всеки елемент от неговия обем, но в различна степен; интензивността на това натрупване във всяко отделно място се характеризира от мярката на неговата кривина.

И така, кривината на пространството тук се разбира като относителния обем на пространството в дадена точка. Написаното съотношение дава както преди:

$$\overline{K}_3 \int_V d\sigma_3 = 2p_3 - 4\pi,$$

където $\overline{K}_3$ е средната кривина на пространството вътре в тетраедъра.